「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 II の複素数と方程式　　難易度：標準レベル

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

x の２次方程式

$$(1+i)x^2+(k+i)x+3+3ki=0$$

が実数解をもつとき k の値と実数解を求めよ。ただし、k は実数の定数とする。

【解説】

まあ、問題を見たら「２次方程式が実数解をもつ」となっているので、判別式を使いたくなるよね。

でも、この問題は判別式を使うことはできないからね。まずは、次のことを覚えておいてください。

判別式について

判別式が使えるのは、２次方程式で係数がすべて実数のときのみ！係数にひとつでも虚数が含まれているときは判別式を使うことはできない！

今回は、係数に虚数の i が含まれているよね。だから、判別式を使うことはできません。

で、こういった問題はどういうふうに解くのかというと、次のように解いていきます。

今回の方程式は実数解をもつんだよね。だから、とりあえず実数解を α とでもして解いていくね。

方程式が α を解にもつんだから、方程式の x のところに α を入れても等号は成立します。だから、$(1+i)x^2+(k+i)x+3+3ki=0$ の x のところに、α を入れてみます。

すると、$(1+i)\alpha^2+(k+i)\alpha+3+3ki=0$ となります。

ここからは、次のように変形をします。これも有名な変形だから覚えておいてね。

虚数を含んだ式の扱い方

> 虚数を含んだ式は、ほとんどの場合 $a+bi$ の形にしてから解いていく！

$a+bi$ の形にすると言ってもよくわからない人がいるかもしれません。
とりあえず、$(1+i)\alpha^2+(k+i)\alpha+3+3ki=0$ の左辺を $a+bi$ の形にしてみるね。

$$
\begin{aligned}
(1+i)\alpha^2+(k+i)\alpha+3+3ki&=0\\
\alpha^2+i\alpha^2+k\alpha+i\alpha+3+3ki&=0\\
(\alpha^2+k\alpha+3)+(\alpha^2+\alpha+3k)i&=0 \quad \blacktriangleleft \text{ 左辺を } a+bi \text{ の形にした！}
\end{aligned}
$$

これで、$a+bi$ の形にするの意味がわかったと思います。i を含んだ式は $a+bi$ の形にします。a, b は実数ですよ。

ここからは、次の複素数の性質を使って解いていきます。

複素数の性質

> a, b が実数のとき、$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

今回の問題も上記の性質を使って解いていきます。

$(\alpha^2+k\alpha+3)+(\alpha^2+\alpha+3k)i=0$ は、$a+bi=0$ としたら a にあたる部分が $\alpha^2+k\alpha+3$ で、b にあたる部分は $\alpha^2+\alpha+3k$ なので、$\alpha^2+k\alpha+3=0$ と $\alpha^2+\alpha+3k=0$ が成立します。

ただ、答案を書くときは必ず α, k が実数のとき、$\alpha^2+k\alpha+3$ と $\alpha^2+\alpha+3k$ が実数より、と忘れないようにしておいてくださいね。この部分を書き忘れていたら減点されてしまいますよ。

それでは、問題に戻ります。$\alpha^2+k\alpha+3=0$ と $\alpha^2+\alpha+3k=0$ が成立するというところまできました。

今回の問題は、k の値と実数解つまり α を求めるんだったんだよね。

じゃあ、あとは今求まった 2 式を連立して解いていけばいいんじゃないのかな？変数が 2 個あるとき、方程式が 2 個あれば変数を 2 個求めることができるんだよね。

今から、$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha+3 & =0\cdots① \\ \alpha^2+\alpha+3k & =0\cdots② \end{cases}$ の連立方程式を解いていきます。

で、ここからの連立方程式の解法が少し独特です（知らなかったら、思いつきません。だから、覚えてね。数学って意外とこういう変形が多いですよ）

中学生のころから連立方程式を解いてきたよね。解法は、加減法や代入法があったと思います。いずれの解法も 1 文字を消去して、文字の種類を 1 種類にしたんだよね。で、今回の問題も ② の式を $k=-\dfrac{\alpha^2+\alpha}{3}$ として、① に代入したら α のみの式になります。

でも、これは α の 3 次方程式。3 次方程式って解をひとつ見つけて、さらに割り算を使って … とメンドウなんだよね。だから、あまりしたくないです。そこで、以下のように解いていきます。

＊こういったタイプの連立方程式は、① − ② をすればうまくいくことが多い !!

この問題も有名だけど、あと 2 つの方程式が共通解をもつという共通解の問題でもこの ① − ② をして連立方程式を解くことがあります。

「なぜ、こうするの？」と質問を受けることがあります。その回答は、「こういうふうにしたらうまくいくから」としか言いようがありません。

まあ、ひとつ屁理屈のような理屈をつけるとしたら、「数学は次数が高いほど考えにくい！次数を低くできるときは次数を低くして考える！」という鉄則があります。

今回の場合、①−② をしたら、一番次数の高い α^2 が消えてくれるよね。だから、①−② をします。

もし仮に今回の連立方程式が $2\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \cdots$ ①, $\alpha^2 + \alpha + 3 = 0 \cdots$ ② なら、α^2 を消すために、①−2×② をしますよ。めったに出てきませんが、何度か見たことがあります。まあ、こんな式変形もあるのだということを覚えておいてください。

じゃあ、今から ①−② をします。

①−② より、$k\alpha - \alpha + 3 - 3k = 0$ となります。これは、うまいこと因数分解できて $(k-1)\alpha - 3(k-1) = 0$ つまり $(k-1)(\alpha-3) = 0$ となってくれます。

今回はたまたま因数分解できました。ですが、この ①−② をするパターンの連立方程式は因数分解できることが多いですよ（設問としてそう作ってくれています）。もし、できなかった場合、ここから代入法などをして解いていきます。

$(k-1)(\alpha-3) = 0$ より、$k = 1$ または $\alpha = 3$ です。これを、①（または、②）の式に代入したら解けます。ここまできたら簡単なので、解答に進みます。

【解答】

方程式の実数解を α とする。

$$(1+i)\alpha^2 + (k+i)\alpha + 3 + 3ki = 0$$

$$\alpha^2 + i\alpha^2 + k\alpha + i\alpha + 3 + 3ki = 0$$

$$(\alpha^2 + k\alpha + 3) + (\alpha^2 + \alpha + 3k)i = 0$$ ◀ 左辺を $a + bi$ の形にした！

k, α が実数より、$\alpha^2 + k\alpha + 3, \alpha^2 + \alpha + 3k$ は実数である。

$\alpha^2+k\alpha+3=0$ と $\alpha^2+\alpha+3k=0$ が成立する。

$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha+3 & =0\cdots ① \\ \alpha^2+\alpha+3k & =0\cdots ② \end{cases}$ とする。

① − ② より $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$ つまり $(k-1)(\alpha-3)=0$ となる。よって、$k=1$ または $\alpha=3$ となる。

$k=1$ を ① に代入する。
$\alpha^2+\alpha+3=0$。この方程式の判別式を D とする。$D=1^2-4\cdot1\cdot3=-11<0$ より、方程式は実数解をもたない。α は実数より不適。
⇑いきなり判別式が出てきてびっくりした人もいると思います。でも、α は実数なんだよね。とりあえず、解の公式を使って解こうかな？とやってみると、ルートの中がマイナスになります。そこで α が実数にならないと気づいて判別式にもっていってもいいですよ。

$\alpha=3$ を ① に代入する。
$3^2+k\cdot3+3=0$ つまり $k=-4$

以上より、$k=\mathbf{-4}$、実数解 **3** である。

今回の問題はどうでしたか？超がつくくらいの有名問題ですよ。ホントに良く出てきます。しっかりと理解しておいてくださいね。

【補足】
連立方程式の補足です。

今回は、① − ② をして求めていきました。それを ③ とでもしておくね。

とある生徒さんから以下のような質問を受けたことがあります。

連立方程式は①かつ②を同時にみたさないといけません。でも、今回は③で求まった値を①に代入しただけです。これでは、①を満たしているということは言えているけど、②を満たしているかどうかわからない、だから②も満たしているか確認しないとダメなのでは？

確かにそうですよね。でも、結論から言えば③を確認する必要はありません。少し難しいけど、理解しておいてくださいね。

今回の式は、① − ② = ③としたんだよね。だから、「（①かつ②）ならば③」が言えます。当たり前だよね。

当然このとき、①も言えているので、「（①かつ②）ならば(①かつ③)」が言えるよね。

で、次は逆に① − ② = ③なんだから、② = ① − ③です。これより、「(①かつ③)ならば②」が言えます。当然、「(①かつ③)ならば(①かつ②)」も言えます。

「（①かつ②）ならば(①かつ③)」と「(①かつ③)ならば(①かつ②)」より、「(①かつ③)」と「(①かつ②)」は同値です。だから、①,③を満たしている時点で必ず②も満たしています。だから、②を確認する必要はないですよ。

少し難しかった人もいると思います。このことについては、「まあ、そんな話もあるんだな」程度でいいですよ。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司