「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ で常に $p\ \sin x \leqq \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$ をみたすという。

このとき p の最大値を求めよ。

【解説】

この問題は、僕が作ったもので三角関数の最大値、最小値や分数関数の扱い方など重要な考え方が多く含まれています。

学校ではあまり勉強しない内容かもしれませんが、大学受験ではよく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

$p\ \sin x \leqq \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$ となっていますが、まず最初にすることは定数分離です。

「定数分離をして」というと何も考えずに両辺を $\sin x$ で割って $p \leqq \dfrac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ とする人がいます。今回の場合これでいいんだけど、不等式の両辺を変数で割るときは必ず確認をしないといけないことがあったよね？不等式の両辺を割ったとき、それがプラスだったら不等号の向きはそのままだけど、マイナスだったら不等号の向きは反対になるよね？

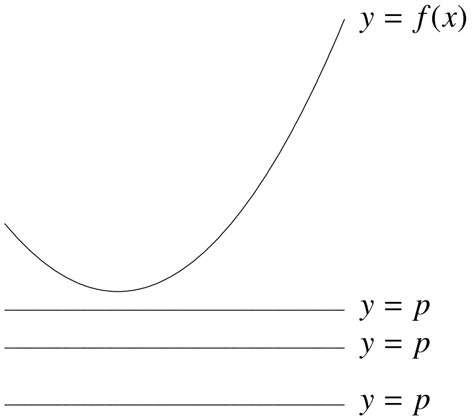
不等式の両辺を変数で割るときは、その変数の正負をしっかりとみておかないとダメということを忘れないようにしてください。今回の問題では $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ という範囲が与え

られていて、この範囲では $\sin x > 0$ だから $p\ \sin x \leqq \dfrac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ の両辺を $\sin x$ で割っても不等号の向きは変わりません。

$p \leqq \dfrac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ となります。

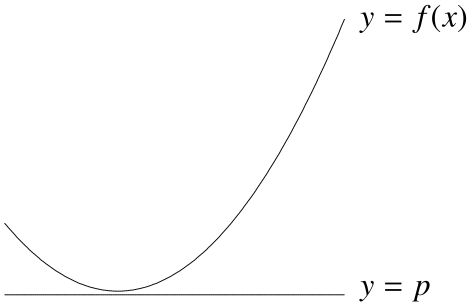
定数分離をしたけど、ここからどうしようかな?見やすくするために $f(x) = \dfrac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ とすると、$p \leqq \dfrac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ は $p \leqq f(x)$ となります。

今回は常に $p \leqq f(x)$ をみたすとなっているんだけど、これがどんな状態かわかるかな？常に $p \leqq f(x)$ をみたすっていうことは $y = p$ と $y = f(x)$ のグラフ２つをかいたとき、常に $y = p$ のグラフの方が $y = f(x)$ のグラフより下側にあればいいってことだよね。これを簡単にグラフにかくと下図のようになります。



⇑ 常に $p \leqq f(x)$ とは、常に $y = p$ のグラフの方が $y = f(x)$ のグラフの下側にある。

p の最大値って分かるかな？$y = p$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフより下側にあればいいんだから、下側にあるっていう条件をみたす最大の p は下図のようになるんじゃない？



$y = p$ のグラフが上図の $y = p$ より上側にいけば $y = p$ のグラフ方が $y = f(x)$ より上側にいくところがでてくるから、常に $y = f(x)$ のグラフの方が $y = p$ のグラフより上側にあるという条件を満たさなくなっちゃうよね。

で、上図になるようなときがどんなときかといえば $y = f(x)$ の最小値と p が一致する時じゃない？

これらのことから次のようなことが言えます。

$p \leqq f(x)$ が常に成立するとき、p の最大値は $f(x)$ の最小値と一致する。

図を使ったら簡単に理解できると思うけど、この考えって意外に出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

ここまできたら $f(x) = \dfrac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ の最大値を求めたらいいんだよね。でもどうやって求めようかな？

関数の最大値、最小値問題の解き方の基本はグラフをかいて考えていきます。でも、今回の場合分数関数で分数関数のグラフなんてかけない (数学 III を勉強している人は、分数関数でもグラフをかくことができます)。そこでどうしようかな？と考えるだけど、今回の関数は $f(x) = \dfrac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ で分子が 1 で定数でしょ？じゃあ、最大値や最小値を求めるためにわざわざ全体を考える必要はないんじゃない？

$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ で定義されているんだけど、この範囲では $\sin x\,(\sin x - \cos x) > 0$ なんだよね。

分数関数で、分子が定数で分母が正の値の範囲のみを動くとき分母が最大となるときに分数全体は最小となり、分母が最小となるときに分数全体は最大となるよね。

今回の問題では $f(x)$ の最小値を求めるんだけど、分母の最大値を求めたらいいことになるよね。この考えは意外によく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

(注) 数学 III を勉強している人は、分数関数でもグラフをかけるので、分母だけで考えないで分数全体で考えても解けないことないが、一般的に分数関数の微分は面倒でグラフをかくのも面倒になる。

数学 III の範囲で出題された時もすぐに微分をしてグラフをかくのではなく、今回のような手法が使えないか考えるようにしておくこと

では、ここから分母の $\sin x(\sin x - \cos x)$ の最大値を求めていきます。$g(x) = \sin x(\sin x - \cos x)$ とでもします。

$g(x) = \sin x(\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \sin x\cos x$ の最大値を求めるわけですが、ここからの式変形は $\sin^2 x - \sin x\cos x$ の形をみた瞬間に次のことを思い出さないといけません。

三角関数の最大値、最小値問題の考え方

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$ の最大値、最小値問題は

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ を代入して解いていく

上記の公式は 2 倍角の公式から簡単に導くことができます。$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos x}{2}$ はできたら暗記してほしいのですが (数学 III を勉強する人は、必ず暗記する必要があります)、数学 II までの範囲までしか必要がないのでしたら、いちいち 2 倍角の公式から導いてもらってもかまいません。

これで問題を解けるので、問題の解答に進みます。一応問題をもう一度書いておきます。

問題

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ で常に $p\ \sin x \leqq \frac{1}{\sin x - \cos x}$ をみたすという。

このとき p の最大値を求めよ。

【解説】

$p \sin x \leqq \frac{1}{\sin x - \cos x}$ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ なので $\sin x > 0$ なので両辺を $\sin x$ で割ると、

$p \leqq \frac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ となる。

$f(x) = \frac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ とする。p の最大値と $f(x)$ の最小値は一致するので、以下 $f(x)$ の最小値を求める。

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ において $\sin x\,(\sin x - \cos x) > 0$ なので、$f(x) = \frac{1}{\sin x\,(\sin x - \cos x)}$ の分母の $\sin x\,(\sin x - \cos x)$ が最大となるとき、$f(x)$ が最小となる。

以下、$g(x) = \sin x\,(\sin x - \cos x)$ として $g(x)$ の最大値を求める。

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sin x\,(\sin x - \cos x) \\
&= \sin^2 x - \sin x \cos x \\
&= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$ ◀ sin で合成をした

ここで $2x + \frac{\pi}{4} = X$ とする。

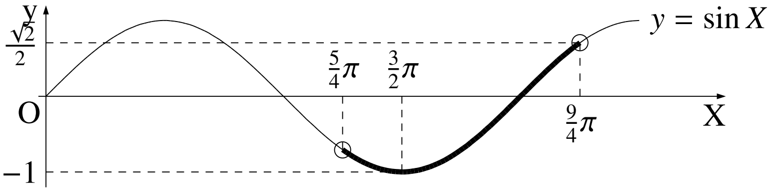
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\pi < 2x < 2\pi$ ◀ 全ての辺を 2 倍した

$\frac{5}{4}\pi < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ ◀ 全ての辺に $\frac{\pi}{4}$ を加えた

$\frac{5}{4}\pi < X < \frac{9}{4}\pi$

⇑ 文字を置き換えたときは、置き換えた文字の値の範囲に注意する。X の範囲を求めた



グラフより、$-1 \leqq \sin X < \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

$$-1 \leqq \sin X < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geqq \sin X \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ ◀ 全ての辺に $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ をかけた

$$-\frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin X \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin X + \frac{1}{2} \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$ ◀ 全ての辺に $\frac{1}{2}$ を加えた

よって、$g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin X + \frac{1}{2}$ の最大値は $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ となる。

$f(x) = \frac{1}{g(x)}$ より、$f(x)$ は $g(x)$ が最大となるとき最小となるので、$f(x)$ の最小値は

$$(f(x) \text{ の最小値}) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2} - 2$$

よって $\frac{1}{\sin x(\sin x - \cos x)}$ の最小値は $2\sqrt{2} - 2$ となる。

以上より、p の最大値は $\mathbf{2\sqrt{2} - 2}$。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司