「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a, b は実数で $a^2+b^2=16,\ \ a^3+b^3=44$ をみたしている。このとき
(1) $a+b$ の値を求めよ。
(2) n を２以上の整数とするとき、a^n+b^n は４で割り切れる整数であることを示せ。

【（１）の解説】

これは東京大学文系で出題された問題です。東大の問題ですが、基本的な問題ですよ。

受験で頻出タイプの問題です。よく出てくるので解けるようになっておいてくださいね。
それでは、（１）に進みます。

a^2+b^2, a^3+b^3 ともに a と b の対称式です。だから、当然基本対称式の $a+b, ab$ のみで表せます。あとは、この２式を連立して解いていくだけです。

ちょっとメンドウですけど、簡単ですよ。ただ、気を付けないといけないこととしては、問題で「a, b は実数」と書かれているよね。

だから、当然だけど a, b が実数でないとダメですよ。

たまに、$a+b, ab$ がともに実数だったら a, b も実数になると思っている人もいます。でも、そんなことないですよ。例えば、$a=1-i, b=1+i$ のとき、$a+b, ab$ ともに実数になるよね。

だから、答えが求まった後に a, b がともに実数であることを確認していかないとダメですよ。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】

$a+b=p, ab=q$ とする。

a, b は t についての 2 次方程式 $t^2-pt+q=0$ の 2 解である。
⇑ 上記が分からないという人がいるけど、簡単ですよ。$t^2-pt+q=0$ の 2 解を a, b とすると解と係数の関係より $a+b=p, ab=q$ です。だから、$t^2-pt+q=0$ の 2 解は a, b ってなるよね。よく出てくるから、覚えておいてください。

a, b は実数であるので、方程式 $t^2-pt+q=0$ の解は実数である。判別式を D とすると、$D \geqq 0$ となる。

$D=(-p)^2-4\cdot a\cdot q=p^2-4q \geqq 0 \cdots ①$

＊ ① が a, b がともに実数であるときの、p, q の条件です。連立して p, q の値を求めます。そこから、この ① をみたしているかどうか、確認しないといけません。

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2&=16\\
(a+b)^2-2ab&=16\\
p^2-2q&=16\cdots ②
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3&=44\\
(a+b)^3-3ab(a+b)&=44\\
p^3-3pq&=44\cdots ③
\end{aligned}
$$

＊ここからは 2 式を連立していくだけです。うまい解法はなさそうなので、単純に ② から $q=\cdots$ の形にして、q を消去して解いていくことにします。

② より $2q=p^2-16$ つまり $q=\dfrac{p^2}{2}-8\cdots ②'$

②′ を ③ に代入する。

$$p^3 - 3\left(\frac{p^2}{2} - 8\right) = 44$$

$$p^3 - \frac{3}{2}p^3 + 24p = 44$$

$$2p^3 - 3p^3 + 48p = 88$$ ◀ 両辺に 2 をかけた！

$$p^3 - 48p + 88 = 0$$

$$(p-2)(p^2+2p-44) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -48 & 88 \\ & & 2 & 4 & -88 \\ \hline & 1 & 2 & -44 & \boxed{0} \end{array}$$

よって、$p = 2$ または $p^2 + 2p - 44 = 0$ となる。

＊まあ、今から確認をしていくけど、答えは $p = 2$ になるのかな？と予想できます（もちろん、予想が外れることもあるかもしれないけど $\cdots$）。$p^2 + 2p - 44 = 0$ を解の公式で解いてやっていきます。ただ、汚い数字だよね。もちろん、ないことはないけど、こんな汚い数字の方が答えになることは少ないよ。

$p = 2$ を ②′ に代入する。$q = \dfrac{2^2}{2} - 8 = -6$

$p = 2, q = -6$ のとき ① をみたす。

⇑ これで $p = 2, q = -6$ が解ということがわかりました。ちゃんと、このことを書いておかないと減点ですよ。

$p^2 + 2p - 44 = 0$ は解の公式より $p = -1 \pm \sqrt{1+44} = -1 \pm 3\sqrt{5}$ となる。

$p^2 + 2p - 44 = 0$ より $p^2 = -2p + 44$ である。これに $p = -1 \pm 3\sqrt{5}$ を代入すると、$p^2 = -2(-1 \pm 3\sqrt{5}) + 44 = 46 \mp 6\sqrt{5}$ (複合同順)

＊ ① をみたしているか確認しないといけません。このとき、p^2 の値が必用です。p が分かっているので、p^2 はそのまま求めてもよいのですが、上記のようにする方が計算がすこしラクになると思います。

②′ より

$$q = \frac{46 \mp 6\sqrt{5}}{2} - 8$$
$$= 23 \mp 3\sqrt{5} - 8$$
$$= 15 \mp 3\sqrt{5}$$

$$p^2 - 4q = 46 \mp 6\sqrt{5} - 4(15 \mp 3\sqrt{5})$$
$$= 46 - \mp 6\sqrt{5} - 60 \pm 12\sqrt{5}$$
$$= -14 \pm 6\sqrt{5}$$
$$= -\sqrt{196} \pm \sqrt{180} < 0$$

⇑$-14-6\sqrt{5}$ は負です。$-14+6\sqrt{5}$ の符号を考えるとき、14 と $6\sqrt{5}$ の大小比較しないとダメです。こんなとき、上記のように 2 上してルートの形にして比べるという方法がありますよ。

このとき、① をみたさないので不適。

以上より、$a + b = \mathbf{2}$

【(２）の解説】

（２）は数学的帰納法で解いていく問題です。$n = k, k+1$ のとき、成立すると仮定して $n = k+2$ のときも成立、ということで示していくタイプの帰納法です。

今回のような難関大で帰納法が設問として出題されているとき、$n = k$ のとき成立と仮定して $n = k+1$ のときに成立という一番簡単なタイプの帰納法が出題されることは少ないです。

【(２）の解答】

n が 2 以上の自然数であるとき、「$a^n + b^n$ が 4 で割り切れる整数」$\cdots$④ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n = 2, 3$ のとき

$a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ より,④ は成立する。

(ii) $n=k, k+1$ (k は 2 以上の整数) のとき、④ が成立すると仮定する。

＊ここから $a^{k+2}+b^{k+2}$ が 4 で割り切れることを示します。$a^{k+2}+b^{k+2}$ は（1）で出てきた方程式 $t^2-pt+q=0$ を使うのが一番ラクです。見てもらったら分かると思いますよ。よく出てくるので覚えておいてください。

（1）より、a, b は t についての 2 次方程式 $t^2-pt+q=0$ つまり $t^2-2t-6=0$ の 2 解であるので、$a^2-2a-6=0, b^2-2b-6=0$ が成立する。

$a^2=2a+6$ の両辺に a^k をかける $a^{k+2}=2a^{k+1}+6a^k\cdots$⑤ であり、同様にして $b^{k+2}=2b^{k+1}+6b^k\cdots$⑥ となる。

⑤,⑥ より、$a^{k+2}+b^{k+2}=2(a^{k+1}+b^{k+1})+6(a^k+b^k)$

$a^{k+1}+b^{k+1}, a^k+b^k$ は 4 で割りきれるので、$a^{k+2}+b^{k+2}$ も 4 で割り切れる。よって、$n=k+2$ のとき ④ が成立する。

以上より、2 以上のすべての整数 n について a^n+b^n は 4 で割り切れる。（証明終）

【(2) の別解について】

今回は（1）を解いていたので、上記のように解くのが一般的だと思います。ですが、突然（2）が出てきたら以下のようにして解いていくことも多いですよ。

なかなか思いつきにくいという人もいます。でも、$(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})$ を展開したら、とりあえず $a^{k+2}+b^{k+2}$ が出てきてくれる、そう考えたら思いつくと思います。

【（２）の別解】

＊帰納法の証明の (ii) の部分は次のように解いても OK です。

$$(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1}) = a^{k+2}+ab^{k+1}+a^{k+1}b+b^{k+2}$$ ◀ とりあえず展開をした

$$a^{k+2}+b^{k+2} = (a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab^{k+1}-a^{k+1}b$$ ◀ 移項して $a^{k+2}+b^{k+2}=\cdots$ の形にした！

$$= (a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)$$

$$= 2(a^{k+1}+b^{k+1})+6(a^k+b^k)$$ ◀ $a+b=2, ab=-6$ を代入した

$a^{k+1}+b^{k+1}, a^k+b^k$ はともに４で割り切れるので、$a^{k+2}+b^{k+2}$ も４で割り切れる。（以下、略）

今回の問題は、ホントに良く出てくる典型問題ですよ。

（１）は、答えが求まっただけで安心する人が多いです。でも、しっかりと条件を見直すようにしておいてくださいね。

あと、全然数学的な考えではないけど、数学の答えって１個になることが多いですよ。だから、答えた２個以上出てきたときはより丁寧に条件を満たしているか考える、ということも覚えておいてくださいね。

また（２）も、超がつくくらい頻出の帰納法です。この $n=k, k+1$ のとき成立すると仮定して、$n=k+2$ のときに成立するというのも受験では頻出ですよ。

学校では、あまり勉強しない人もいるみたいです。ただ、覚えておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあっ

てそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司