

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！
<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

正の実数 a に対し、 $x = a + \frac{1}{a}$, $y = a - \frac{1}{a}$ とおく、このとき $x^8 - y^8$ が最小となる a の値と、その最小値を求めよ

【解説】

北海道大学の文系学部の過去問です。対称式に関する問題です。

次数が高くて少し計算がやっかいです、とにかく普通どおりに計算をしていけば解くことができます。制限時間は 10 分くらいで十分だと思います。

対称式をあまり知らないという人は、以下のプリントを見てください。

対称式の解説プリント <http://www.hmg-gen.com/taisyouusiki.pdf>

対称式の練習問題の解答 <http://www.hmg-gen.com/k-taisyouusiki.pdf>

$x^8 - y^8$ を見て、よく分かんないけど、このままでは次数が高すぎるのでとりあえず因数分解をしていくことにします。

$$\begin{aligned} & x^8 - y^8 \\ &= (x^4 + y^4)(x^4 - y^4) \\ &= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) \end{aligned}$$

とりあえず、ここまで因数分解できました。もうこれ以上因数分解できないので、

ここから $x = a + \frac{1}{a}$, $y = a - \frac{1}{a}$ を代入して解いていきます。

$$x - y = a + \frac{1}{a} - \left(a - \frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a}$$

$$x + y = a + \frac{1}{a} + \left(a - \frac{1}{a}\right) = 2a$$

$$xy = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^2 - \frac{1}{a^2}$$

↑ 対称式の問題では、基本対称式 $x + y$ と xy の値が必要になるので、 xy の値を求めた！

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \quad \blacktriangleleft \text{有名な対称式の式変形。この式は暗記}$$

$$= (2a)^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)$$

$$= 4a^2 - 2a^2 + \frac{2}{a^2}$$

$$= 2a^2 + \frac{2}{a^2}$$

$$= 2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$$

$$x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 \quad \blacktriangleleft x^2 \text{ と } y^2 \text{ の対称式とみなす}$$

$$= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \quad \blacktriangleleft \text{覚えるべき対称式より}$$

$$= \left(2a^2 + \frac{2}{a^2}\right)^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 \quad \blacktriangleleft x^2 + y^2 = 2a^2 + \frac{2}{a^2}, xy = a^2 - \frac{1}{a^2} \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= 4a^4 + 8 + \frac{4}{a^4} - 2\left(a^4 - 2 + \frac{1}{a^4}\right)$$

$$= 2a^4 + 12 + \frac{2}{a^4}$$

$$= 2\left(a^4 + 6 + \frac{1}{a^4}\right)$$

これらの式より、

$$\begin{aligned}
& x^8 - y^8 \\
&= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) \\
&= 2\left(a^4 + 6 + \frac{1}{a^4}\right) 2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) 2a \frac{2}{a} \\
&= 16\left(a^4 + \frac{1}{a^4} + 6\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

すこし面倒でしたけど、何も考えずにただ単に式変形をしたらここまでできました。

で、「ここからどうするんだろう…」と考えるんだけど、どうしようかな？まず、最大値、最小値問題はグラフをかいて考えるのが基本だったんだけど、 $y = 8\left(a^4 + \frac{1}{a^4} + 6\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$ のグラフなんて面倒そうだよな。

*分母に変数が含まれた関数のグラフをかくには数学 III の知識が必要です。だから、数学 IA、IIB の問題で分母に変数がきたときはグラフをかいて解く以外の解法が必ず存在します。

で、どうしようかな？と思うんだけど、与式をよく見てみるとこれって $a^2 + \frac{1}{a^2}$ のみの式になってくれるんじゃない？

だって、 $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = a^4 + 2 + \frac{1}{a^4}$ となるから、 $a^4 + \frac{1}{a^4}$ も $a^2 + \frac{1}{a^2}$ で表すことができるよな。

ここからは、与式を $a^2 + \frac{1}{a^2}$ のみの式にして、 $t = a^2 + \frac{1}{a^2}$ とでも文字を置き換えて解いていくだけです。

当たり前だとは思いますが、文字を置き換えたときは範囲に注意しないといけません。 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ の値の範囲は相加相乗平均より 2 以上となります。

相加相乗平均について知らないという人は、<http://www.hmg-gen.com/situmon/tsuugaku2B/2B-3.html> を見てください。

それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned} & x^8 - y^8 \\ &= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) \\ &= 2\left(a^4 + 6 + \frac{1}{a^4}\right) 2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) 2a \frac{2}{a} \\ &= 16\left(a^4 + \frac{1}{a^4} + 6\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \end{aligned}$$

ここで、 $a^2 + \frac{1}{a^2} = t$ とする。

$a^2 > 0$ より、相加相乗平均より $t = a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$ 等号は $a^2 = \frac{1}{a^2}$ つまり $a = 1$ のときに成立

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{a^2} &= t \\ \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 &= t^2 \\ a^4 + 2 + \frac{1}{a^4} &= t^2 \\ a^4 + \frac{1}{a^4} + 6 &= t^2 + 4 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} x^8 + y^8 &= 16(t^2 + 4)t \\ &= 16t^3 + 64t \end{aligned}$$

$f(t) = 16t^3 + 64t$ とする。

$$\begin{aligned} f(t) &= 16t^3 + 64t \\ f'(t) &= 48t^2 + 64 \end{aligned}$$

よって $f'(t)$ は常に正。 $f(t)$ は単調増加なので、 $t \geq 2$ の範囲では $t = 2$ のときに、 $f(t)$ は最小となる。

$$f(2) = 16 \cdot 2^3 + 64 \cdot 2 = 256$$

以上より、 $x^8 + y^8$ は $a = 1$ のとき最小値 **256** をとる。

今回の問題はどうかだったでしょうか？私の答案よりももっと簡単に解ける手法があるかもしれません。ただ、そんな解き方を考えるよりも使いなれて対称式の知識を使って解いた方がはやいと思いこの解法で解きました。

試験会場でも、あれこれ考えるよりもこのくらいの計算量なら少々強引に押し切ることもあります。そうなったら計算力の勝負になります。普段から、計算力を鍛えるようにしておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司