「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1}) \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

を満たしているとき、以下の問いに答えなさい。

(1) n に関する数学期帰納法で、$a_n > 0$ であることを証明せよ。

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき、b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。

【（１）の解説】

帰納法の問題です。今回の問題は、「数学的帰納法で $\cdots$ 」と問題に書いてくれています。

ですが、問題に書いていなかったとしても、「自然数 n を含んだ証明のときは、数学的帰納法を使うのでは？」と考えるクセをつけておいてください。

もちろん、n が入っていても必ずしも帰納法を使って解くわけではないですよ。でも、「帰納法で解けるかな？」というときはとりあえず帰納法で解いてみます。

それで、解けたら OK ですし、解けなければその時点でまた別の解法を考えます。

【（１）の解答】

$a_n > 0 \cdots$ ① であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$ のとき、$a_1 = 1 > 0$ より ① は成立する。

(ii) $n = k$ (k は 1 以上の整数) のときに、① が成立すると仮定する。

つまり、$a_k > 0$ が成立する。

＊ここからは、$n = k + 1$ のときも ① が成立するということを示せば OK です。$n = k + 1$ のとき、① は、$a_{k+1} > 0$ です。与えられてものを使ってこれを示していきます。

問題で、$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ が与えられています。この n を k で置き換えると、a_{k+1} が出てきて証明ができそうなので、こうしていくことにします。

たまに、$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ の n を k で置き換えていいの？なんて思う人もいます。でも OK ですよ。

$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ はすべての自然数 n で成立する式なんだよね。n のところは、自然数であればどんな数が入っても OK です。だから、n のところを k にしてもらって OK ですよ。

$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ で、$n = k$ のとき、$a_{k+1} - a_k = a_k(5 - a_{k+1})$ となる。

$$a_{k+1} - a_k = a_k(5 - a_{k+1})$$
$$a_{k+1} - a_k = 5a_k - a_k a_{k+1}$$
$$(1 + a_k)a_{k+1} = 6a_k$$

ここで、$a_k > 0$ より、$1 + a_k \neq 0$ より、両辺を $1 + a_k$ で割る ◀ 0 で割ることはできないよ。気を付けてね。

$$a_{k+1} = \frac{6a_k}{1 + a_k}$$

ここで $a_k > 0$ より、$a_{k+1} = \dfrac{6a_k}{1 + a_k} > 0$ となる。

⇑ $a_k > 0$ のとき $6a_k > 0$ で $1 + a_k > 0$ と分子分母両方とも正です。だから、当然 $\dfrac{6a_k}{1 + a_k}$ も正です。

これで、$a_{k+1} > 0$ が言えたので証明終了です。

$a_{k+1} > 0$ つまり、$n = k+1$ のときも ① は成立する。

以上より、すべての自然数 n で ① が成立する。（証明終）

【（２）の解説】

漸化式の問題です。

漸化式は、パターンが決まっているものはパターン通り解いていきます。

当たり前だけどパターンはすべて覚えておかないとダメですよ。もし、自信のない人は以下のプリントを見てください。漸化式のすべてのパターンを網羅していますよ。

漸化式の解説プリント（問題）https://hmg-gen.com/mondai-zenkasiki.pdf
漸化式の解説プリント（解説）https://hmg-gen.com/zenkasiki.pdf

ただ、今回の漸化式の問題はパターン外のものです。で、そういうときは誘導が与えられていることが多いので安心してください。

＊パターン外の漸化式の問題で誘導がないときは、a_1, a_2, a_3 などを求めて推測しての帰納法で解けることが多いです。パターン外は「誘導があるタイプ」か「推測して帰納法」のいずれかと思っておけばいいですよ。

今回の場合、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ と与えられています。まあ、勘のいい人ならすぐに分かると思います。$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ の両辺を $a_n a_{n+1}$ で割ると b_{n+1} と b_n のみの式になってくれます。

＊当然だけど、０で割ることはできません。ただ、（１）で示したように $a_n > 0$ です。n は自然数ならなんでも OK です。$n+1$ も自然数なので当然 $a_{n+1} > 0$ です。a_n も a_{n+1} も０より大きいので $a_n a_{n+1} > 0$ つまり $a_n a_{n+1} \neq 0$ なので、両辺を $a_n a_{n+1}$ で割ることができます。

受験問題で（１)、（２）となっているとき（２）は（１）を使って解くことが多いです。

今回も、これで（１）の結果を使うという訳です。

$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ の両辺を $a_n a_{n+1}$ で割ります。こういうと「言われたら気づけるけど、こんな式変形なかなか思いつけない」という人がいます。

確かにそうだよね。なかなか気づけないです。まあ、今回の場合まだ気づきやすい問題だっと思います。もっと複雑な変形をすることもあり、そういうときはさらに気づきにくい問題もあります。

でも、これって簡単に気づける方法があります。で、どういうふうにしているのかというと、与式を b_{n+1} と b_n の式にしないとダメなんだよね。ということは、当たり前だけど $b_{n+1}\left(=\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ が必用になります。

$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ の両辺を $a_n a_{n+1}$ で割ると、一番左側の部分が $\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_{n+1}} = b_{n+1}$ と b_{n+1} が出てきてくれるよな。だから、両辺を $a_n a_{n+1}$ で割りました。

こういう説明をすると「$a_n a_{n+1}$ で割ると確かに b_{n+1} は出てきてくれる。でも、それ以外の部分がうまくいく根拠はないのでは？」と思う人がいます。

確かにその通りです。まったくうまくいく根拠はないですよ。ただ、当たり前だけど誘導が与えられているとき、うまい具合に解けるように誘導が与えられているんだよね。

だから、強引かもしれないけど、ひとつの部分もあわせます。そうすると、残った部分もうまくいくようになっているということが多いですよ。誘導付きの漸化式は、このようにして解いていきます。

そうは言っても、どうしてもうまい方法が気づけないことありますよね。そんなとき、は代入すればOKですよ。どういうことかと言うと、今回は $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ つまり $a_n = \dfrac{1}{b_n}$ です。また $a_{n+1} = \dfrac{1}{b_{n+1}}$ です。

この２式を $a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ に代入して整理していくと答えにたどりつきます。

最初の両辺を $a_n a_{n+1}$ で解く解法の方が計算がすこしだけラクです。でも、うまい解法が思いつかなければ、後者の代入するという解き方で大丈夫ですよ。僕も初見の問題を解くときは、「なにかうまい解法があるはず。でも、メンドウだから代入しよう」というふうに解くことも多いです。あまり気にせずに進めてもらったらいいですよ。

【(２) の解答】

（１）より、$a_n a_{n+1} > 0$ つまり $a_n a_{n+1} \neq 0$ である。

$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ の両辺を $a_n a_{n+1}$ で割る。

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}}(5 - a_{n+1})$$
$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{5}{a_{n+1}} - 1$$
$$\frac{6}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$$
$$6b_{n+1} = b_n + 1 \quad \left(\because \quad b_n = \frac{1}{a_n}, b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$\boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}}$$

【(３) の解答】

＊この問題は、簡単です。一番簡単なパターンの漸化式です。もし、わからないという人は、先ほど紹介した漸化式のプリントを見ておいてください。

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$$

$b_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6} \cdots ②$ とする。

特性方程式より

$$\alpha = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}$$
$$\frac{5}{6}\alpha = \frac{1}{6}$$
$$\alpha = \frac{1}{5}$$

よって、② は $b_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(b_n - \frac{1}{5}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{b_n - \frac{1}{5}\right\}$ は初項 $b_1 - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$、公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列より

$$b_n - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

つまり $b_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5} = \frac{4 + 6^{n-1}}{5 \cdot 6^{n-1}}$

$a_n = \frac{1}{b_n}$ より $a_n = \boldsymbol{\frac{5 \cdot 6^{n-1}}{4 + 6^{n-1}}}$

【注】
まあ、ちょっと数学の雑談です。

少し前までは、「特性方程式は解答には書くな」と言われていました。

今でも一部の高校ではそういうふうに教えている先生がいるみたいです。ただ、今は使ってよいことになったみたいです。

だから、上記のように「特性方程式より …」と書いてもらって大丈夫ですよ。授業をしていて、たまに質問を受けるので書いておきました。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司