

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

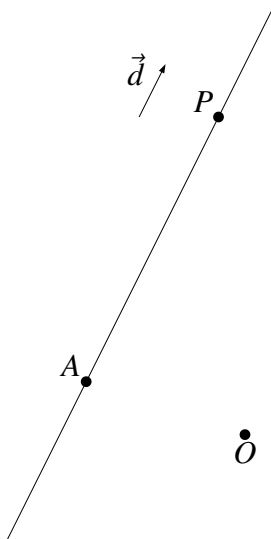
- (1) 点 $(2, 4)$ を通り、ベクトル $(-1, 3)$ に平行な直線の方程式を求めよ。
- (2) 2点 $A(-2, 3)$, $B(2, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

*このプリントは、まじめ？に読んでも10分くらいで読める内容です。でも、このプリントだけで、直線のベクトル方程式は完璧です。直線のベクトル方程式はごくごく簡単な内容です。しっかりと理解しておいてくださいね。

【(1) の解説】

*直線を通る点1点と、方向ベクトルが与えられているとき

以下のように、点 O (O は別にどこでもいいけど、今回のように座標が与えられているときは原点を O にすることが多いです) があり、直線上の任意点を P とします。



上図になっているとき、 $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ と表すことができるよね。

さらに、 \vec{AP} は \vec{d} と平行なんだから、 $\vec{AP} = t\vec{d}$ と表せるよね。通常、平行だったら $\vec{AP} = k\vec{d}$ と k を使うことが多いけど、ベクトル方程式のときは t を使うことが多いですよ。

別に k を使ってもバツにされることはないけど、 t を使うようにしてくださいね。

これで、 $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d}$ であることがわかりました。

で、位置ベクトルの始点を O とすると、 $\vec{OP} = \vec{p}$, $\vec{OA} = \vec{a}$ なので、 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ となります。

*位置ベクトルの話しをします。今回のベクトル方程式とは関係ないですが、ちゃんと理解している人が少ないので話しておきます。位置ベクトルの始点は好きにとってもらってかまいません。ただ、位置ベクトルの始点はすべて同じでないとダメですよ。

例えば、 $\vec{AP} + \vec{OB}$ の場合、位置ベクトルの始点を O とするとすべての始点を O にしないといけません。 $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$ とした上で、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OP} = \vec{p}$ と位置ベクトルを設定すると、 $\vec{AP} + \vec{OB} = \vec{p} - \vec{a} + \vec{b}$ となります。

また、位置ベクトルの始点を A で考える ($\vec{AP} = \vec{p}$, $\vec{AO} = \vec{o}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ とする) と、 $\vec{AP} + \vec{OB} = \vec{AP} + \vec{AB} - \vec{AO} = \vec{p} + \vec{b} - \vec{o}$ となります。

位置ベクトルの始点は O にすることが多いと思うけど、上記の始点を A にしたように何を始点にしてもいいですよ。

このベクトル方程式を $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ と暗記している人がいます。別に暗記してもらってもいいけど、簡単に導けるのでわざわざ暗記する必要はないと思いますよ（暗記している人はそれでいいですよ。ただ、間違えて暗記してしまっは大変です。暗記するのなら、正確に暗記しないとダメですよ）。

*例えば、三角関数の2倍角の公式のように簡単に導けたとしても、よく出てくる場合、

公式は暗記した方がいいです。

でも、今回の直線のベクトル方程式の公式のように「出題頻度がそれほど高くない」かつ「簡単に導ける」場合、その場で導いた方が間違えにくいと思いますよ。

暗記したい人は、暗記でもいいです。でも、絶対に、絶対に間違えないように暗記してくださいね。暗記は、間違えて覚えてしまえば最悪ですよ

【(1) の解答】

* $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d}$ を使って解いていきます。さっきも話したけど、これは出てくるたびに余白でちょこちょこ導いて解いてもらったらいいですよ。

直線上の任意点を $P(x, y)$ 、原点を O とする。

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} + t\vec{d} \\ (x, y) &= (2, 4) + t(-1, 3) \\ &= (2 - t, 4 + 3t)\end{aligned}$$

*もし、点 P を媒介変数で表せなら、上記が答えです。今回の場合、「直線の方程式を求めよ」なので、 $x = 2 - t, y = 4 + 3t$ より t を消去して、 x と y の式にしたものが答えです。

$x = 2 - t, y = 4 + 3t$ となる。 $t = 2 - x$ を $y = 4 + 3t$ に代入する。

$$\begin{aligned}y &= 4 + 3(2 - x) \\ &= -3x + 10\end{aligned}$$

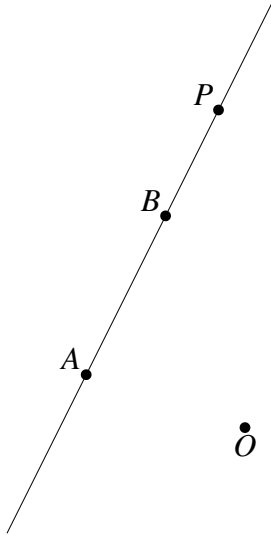
よって、求める直線の方程式は $y = -3x + 10$ である。

【(2) の解説】

*直線を通る点2点が与えられているとき

直線を通る点2点が与えられているときのベクトル方程式を解いていきます。さっきの(1)の場合とほとんど同じですよ。

以下のように、点 O (O は別にどこでもいいけど、今回のように座標が与えられているときは原点を O にすることが多いです) があり、直線上の任意点を P とします。



上記のようになるとき、 $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ と表すことができるよね。

* $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ でなくても、 $\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP}$ としてもらってもいいですよ。ただ、アルファベット順で B ではなく A を使うことが多いです。だから、 $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ の方が多いです。

$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ と表せました。で、 \vec{AP} と \vec{AB} は平行なんだよね。だから、 $\vec{AP} = t\vec{AB}$ と表すことができます。

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= \vec{OA} + t\vec{AB} \\ &= \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \end{aligned}$$

ここで位置ベクトルの始点を O とします。 $\vec{OP} = \vec{a}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とすると、

$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ が導かれます。

*これも、簡単に導けたよね。この直線のベクトル方程式は、出題頻度もそれほど高くないです。出題されるたびに自分で求めてもらったらいいと思います。

暗記してもいいけど、暗記するなら絶対に間違えなく暗記するようにしてね。「くどい」ようだけど、暗記は気を付けてね。これだけ、いっても間違っ暗記する人が多いので、一応指摘しておきました。

【(2) の解答】

直線上の任意点を $P(x, y)$ 、原点を O とする。

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= (1-t)(-2, 3) + t(2, 1) \\ &= (4t-2, -2t+3)\end{aligned}$$

$x = 4t - 2 \cdots \textcircled{1}$, $y = -2t + 3 \cdots \textcircled{2}$ とする。

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \text{ より } x + 2y = 4t - 2 - 4t + 6 \text{ つまり } x + 2y - 4 = 0$$

よって、求める直線の方程式は $x + 2y - 4 = 0$ である。

【注】

たまに、「『 $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$ 』と『 $\vec{OP} = \vec{OB} + t\vec{BA}$ 』どっちで解いてもいいってことだったので、解いてみました。少し答えが違うような気がするのですが…」と質問を受けることがあります。

「どっちでもいいですよ」ということを今回の問題を通して話していきます。じゃあ、 $\vec{OP} = \vec{OB} + t\vec{BA}$ の方で解いてみるね。

$$\begin{aligned}
\vec{OP} &= \vec{OB} + t\vec{BA} \\
&= \vec{OB} + t(\vec{OA} - \vec{OB}) \quad \blacktriangleleft \text{始点を } O \text{ にした!} \\
&= t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} \\
&= t(-2, 3) + (1-t)(2, 1) \\
&= (-4t + 2, 2t + 1)
\end{aligned}$$

$x = -4t + 2 \dots \textcircled{1}$, $y = 2t + 1 \dots \textcircled{2}$ とする。

$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2}$ より、 $x + 2y = -4t + 2 + 4t + 2$ 。よって、直線の方程式は $x + 2y - 4 = 0$ となる。

これで、分かったと思うけど、両方とも答えが同じになったよね。だから、好きな方でやってもらったらいいですよ。たまに、「 (x, y) を t を使って表せ」という問題のことがあります。このときは、 $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$ の解き方のときと、 $\vec{OP} = \vec{OB} + t\vec{BA}$ の解き方のときとは一致しません。

ただ、 t を使って表す方法は1通りでないので、どちらでも正解ですよ。いずれの場合も、媒介変数の t を消去して x, y のみの式にしたら一致してくれています。

それでは、これで直線のベクトル方程式に関する説明は終わりです。「あれっ?簡単だった...」なんて思う人も多いと思います。

ベクトル方程式なんて難しそうなタイトルです。でも、単にベクトルを含んだ方程式だから、ベクトル方程式ってついでに過ぎないですよ。

名前負けせずに頑張ってくださいね。

(PS. 高校生ときの僕も、名前負けしていました。でも、わかったら簡単でした(笑顔)。「難しい名前つけて、単なるハッター野郎やん」なんてブツブツ言っていました。

しょうもないこと言って、ごめんなさいね。僕みたいに思っている人が多いので書いておきました。それでは、頑張ってください。)

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司