「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

$C: y = x^2$ がある。C 上に２点 $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$ がある。ただし、$\alpha < \beta$。このとき、以下の問いに答えよ

(1) 点 A における C の接線の方程式を求めよ
(2) 点 B における C の接線の方程式を求めよ
(3) (1), (2) で求めた２接線の交点の座標を求めよ
(4) C と２接線によって囲まれる部分の面積を求めよ

＊数学 II の積分の問題で $y = x^2$ に関する問題です。$y = x^2$ に関する問題とは、実は $y = x^2$ にはいろいろな性質があり、それらをつかった問題がよく出題されます。

今回話す内容もそのうちのひとつです。この問題は、よく出てくるので公式として覚えておかないといけない内容です。計算して導けるのはもちろんのこと、結果自体も覚えてしまってください。

【（１）の解答】

$y = x^2$　$y' = 2x$ より、点 A における C の接線の方程式は

$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$

$\boldsymbol{y = 2\alpha x - \alpha^2}$

【（２）の解答】

(1) と同様にして、$\boldsymbol{y = 2\beta x - \beta^2}$ ◀ (1) と計算式はまったく同じ。α が β に変わっただけ

【（３）の解答】

$y = 2\alpha x - \alpha^2$ と $y = 2\beta x - \beta^2$ より y を消去して

$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2$

$2(\alpha - \beta)x = \alpha^2 - \beta^2$

$2(\alpha - \beta)x = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

$\alpha < \beta$ より、$\alpha - \beta \neq 0$ より両辺を $\alpha - \beta$ で割ると ◀(注) を見よ

$2x = \alpha + \beta$

$x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$y = 2\alpha x - \alpha^2$ に $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ を代入すると

$y = 2\alpha \cdot \dfrac{\alpha + \beta}{2} - \alpha^2$

$\quad = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2$

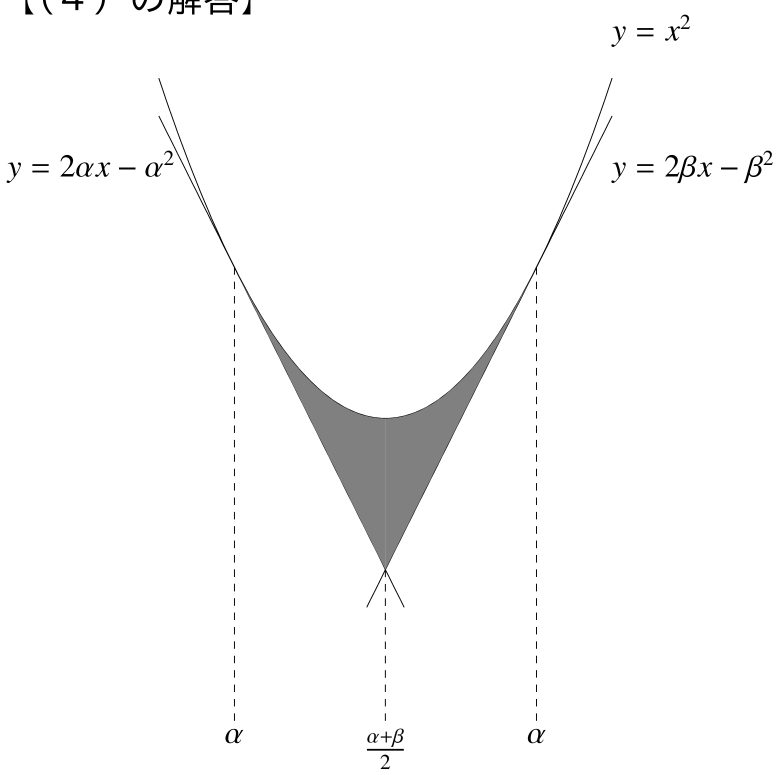
$\quad = \alpha\beta$

よって、求める 2 接線の交点は $\left(\boldsymbol{\dfrac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta}\right)$ となる。

(注) 今回は両辺を $\alpha - \beta$ で割ったが、両辺を変数でわるときは、必ずその変数が 0 になるかどうかということを確認しておかないといけない。0 で割るということは出来ないので、変数が 0 になる場合があるときはしっかりと場合分けをしないといけない。

両辺を変数で割るときは、必ず 0 になるかどうかということを確認するようにしておいてください。

【(４) の解答】



求める部分の面積を S とする。

$$S = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\right\} dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left\{x^2 - (2\beta - \beta^2)\right\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)\, dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x^2 - 2\beta x + \beta^2)\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2\, dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \beta)^2\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

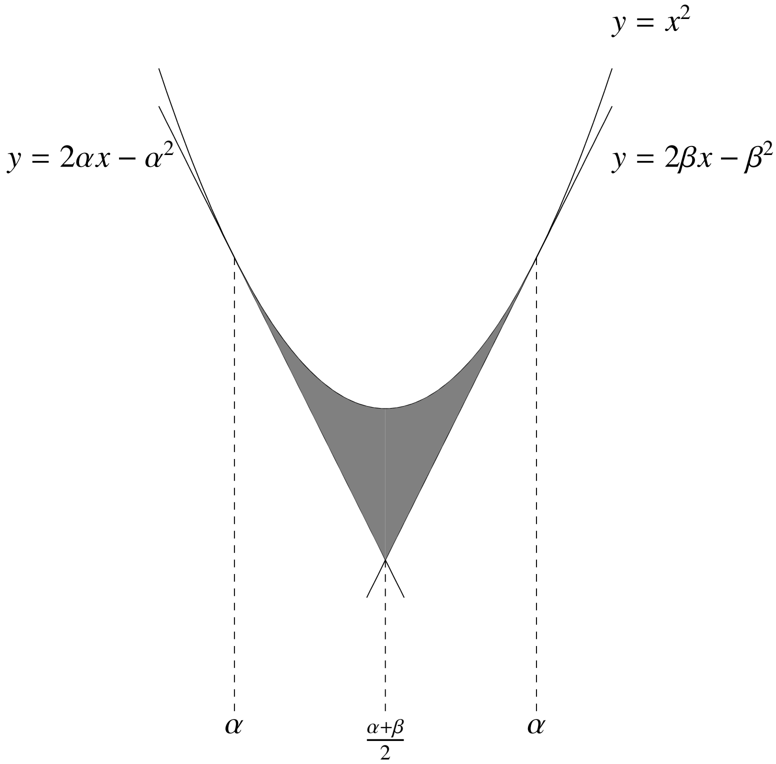
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)^3 - \frac{1}{3}(\alpha-\alpha)^3 + \frac{1}{3}(\beta-\beta)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3$$ ◀ $(\alpha-\beta)^3 = -(\beta-\alpha)^3$ を利用

$$= \mathbf{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3}$$ ◀ これが答え

冒頭にも言いましが、この問題は当然自分で求められないといけませんが、計算結果自体も覚えておいた方がいいです。



$y = x^2$ の性質

上図のように $y = x^2$ の２接線の交点の座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ である。

また、２接線と $y = x^2$ によって囲まれる部分の面積 S は、$S = \dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ である。

【注】 放物線が $y = x^2$ 以外だったらどうなの？と質問を受けることがあります。

その場合、まず交点ですが交点の x 座標はどういった放物線でも $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ になります。

y 座標は、放物線によって変わってきます。$y = ax^2$ のとき、交点の y 座標は $a\alpha\beta$ となります。他の放物線のときは、その場で自分で計算をするようにしてください。

次に、放物線と２接線によって囲まれる部分の面積ですが、これはどういった放物線でも必ず $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ になります。

今回のこの問題ですが、本当に有名です。ある意味、受験界では常識と言っていいくらいの有名な性質なんですけど、知っている高校生は意外なほど少ないです。知っているか知らないかで、解く時間がまったく変わってきます。ぜひとも覚えておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司