「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

-問題-

n を自然数、$S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2$ とする。数学的帰納法を用いて、$S_n + S_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)$ を示せ。

＊数学的帰納法の問題です。数学的帰納法は、実際の大学受験では超がつくくらい頻出です。等式の証明の場合、強引に同じ形にするということがポイントです。

慣れていない人にとっては難しく感じるかもしれません。でも、こういう強引な変形をすることは多いです。しっかりと理解しておいてくださいね。

【解説】

違ったパターンもあるけど、帰納法は (i) $n = 1$ のとき成立することを示す。(ii) $n = k$ のとき成立すると仮定して、$n = k + 1$ のときも成立する、のパターンで示していきます。

それでは、まず $n = 1$ のときは簡単なので解説は省略します。解答を見てください。難しい (ii) の方を解説することにするね。

示したい $S_n + S_{n+1} = (-1)^{n+1}(n + 1)$ を ① とでも、します。

$n = k$ のとき ① が成立すると仮定して、$n = k + 1$ のとき ① が成立するということを示すんだよね。

で、ここでしっかりと示したい式を意識してくださいね。僕の場合、必ず余白に書くようにしていますよ。

＊今回示したい式は、① で $n = k+1$ のとき、つまり $S_{k+1} + S_{k+2} = (-1)^{k+2}(k+2)$ である。

上記を余白に書いて示していきます。こうした方が、「何をしようとしているか？」ということが明白になるので、迷子にならなくてすみますよ。

で、あともうひとつ、今回は「$n = k$ のとき、① が成立すると仮定」したんだよね。だから、① で $n = k$ のときの式、つまり $S_k + S_{k+1} = (-1)^{k+1}(k+1)$ は成立します。

＊数学では不必要な情報が与えられるということは絶対にありません。だから、この $S_k + S_{k+1} = (-1)^{k+1}(k+1)$ をどこかで使う !! ということを強く意識しながら解くようにしてください。

それでは、問題に進みます。今、$S_{k+1} + S_{k+2} = (-1)^{k+2}(k+2)$ であることを示したいんだよね。とりあえず左辺を変形して右辺にもっていくことにします。

$S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2$ が与えられているけど、分かりやすくするためにシグマの中身を a_i とでも置き換えることにするね。$a_i = (-1)^i i^2$ とします。

$S_{k+1} + S_{k+2}$ を変形していくんだけど、$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$ になることと、$S_{k+2} = S_{k+1} + a_{k+2}$ になります。

なぜ、こういった式変形をするのか？ということはおいておいて、とりあえずこの式変形があっているということは理解できるかな？

これは、簡単ですよ。S_{k+1} というのは初項から第 $k+1$ 項までの和を表します。で、S_k は初項から第 k 項までの和を表しているんだよね。$S_k + a_{k+1}$ は初項から第 k 項までの和である S_k にさらに第 $k+1$ 項の a_{k+1} を足したんだから、当然 $S_k + a_{k+1}$ は初項から第 $k+1$ 項までの和を表しているよね。

だから、$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$ は成立します。同様の考えで、$S_{k+2} = S_{k+1} + a_{k+2}$ も成立します。

「何、当たり前のこと言ってんの？」なんて思う人もいます。でも、理解できない人もいるみたいだから一応解説しておきました。

それでは、なぜこういった式変形をしたのか？ということを話します。ここからが重要ですよ。

さっき、話したけど今回は $n=k$ の式 $S_k+S_{k+1}=(-1)^{k+1}(k+1)$ をどこかで使わないとダメなんだよね。で、この式を使うためには S_k+S_{k+1} が必要です。だから、さっきの式を強引に変形して S_k と S_{k+1} が出てくる形にしました。

⇑ 数学では上記のような考え方が重要です。「なぜ自分がこういった式変形をしているのか？」という根拠をもって、問題を解くようにしてくださいね。

$S_{k+1}+S_{k+2}$

$=S_k+a_{k+1}+S_{k+1}+a_{k+2}$ ◀ $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}, S_{k+2}=S_{k+1}+a_{k+2}$ より

$=S_k+S_{k+1}+a_{k+1}+a_{k+2}$ ◀ 順番を入れ替えて書いただけですよ。

$=(-1)^{k+1}(k+1)+(-1)^{k+1}(k+1)^2+(-1)^{k+2}(k+2)^2$ ◀ $S_k+S_{k+1}=(-1)^{k+1}(k+1)$ と $a_i=(-1)^i i^2$ より

とりあえず、ここまで式変形をすることができました。で、ここからどうするのかな？と考えます。

で、今やりたいこととしては $S_{k+1}+S_{k+2}=(-1)^{k+2}(k+2)$ を示したいんだよね。とりあえず、すべてに $(-1)^{k+2}$ がついてくれないとダメです。

さっき変形した式 $(-1)^{k+1}(k+1)+(-1)^{k+1}(k+1)^2+(-1)^{k+2}(k+2)^2$ は $(-1)^{k+1}$ があるけど、これを強引に $(-1)^{k+1}=-(-1)^{k+2}$ と変形します。

強引な式変形だけど、これで $(-1)^{k+2}$ を含んだ式になってくれるよね。等式の証明のときは、左辺を変形したら右辺になってくれるんだよね。

だから、強引に変形をして右辺と同じ形にする、というのがひとつのポイントですよ。

今回の式変形はまだ思いつきやすかったです。でも、「えっ、こんな強引に変形をするの？」なんてものもよく出てきます。とにかく、強引に右辺の形を作り出すんだ、と強く意識する癖をつけておいてください。

これで、分かると思うので解答に進みます。

【解答】

$a_i = (-1)^i i^2$ とする。

$\Uparrow$ シグマの中身を a_i と置きました。

$S_n + S_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1) \cdots ①$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$ のとき

$S_1 + S_2 = a_1 + a_1 + a_2$

$\Uparrow$ S_n は初項から第 n 項までの和より、$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2$ ですよ。

$= 2a_1 + a_2$

$= 2 \cdot (-1)^1 \cdot 1^2 + (-1)^2 \cdot 2^2$ ◀ $a_i = (-1)^i i^2$ より、$a_1 = (-1)^1 \cdot 1^2, a_2 = (-1)^2 \cdot 2^2$

$= -2 + 4$

$= 2$

$(-1)^{1+1}(1+1)$ ◀ ① の右辺の $(-1)^{n+1}(n+1)$ で、$n = 1$ のとき $= 2$

よって、$n = 1$ のとき ① が成立する。

(ii) $n = k$ のとき

① が成立すると仮定する。つまり、$S_k + S_{k+1} = (-1)^{k+1}(k+1) \cdots ②$ が成立する。

$S_{k+1} + S_{k+2}$

$= S_k + a_{k+1} + S_{k+1} + a_{k+2}$ ◀ $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}, S_{k+2} = S_{k+1} + a_{k+2}$ より

$= S_k + S_{k+1} + a_{k+1} + a_{k+2}$ ◀ 順番を入れ替えて書いただけですよ。

$= (-1)^{k+1}(k+1) + (-1)^{k+1}(k+1)^2 + (-1)^{k+2}(k+2)^2$ $(\because$ ②$)$ ◀ $S_k + S_{k+1} = (-1)^{k+1}(k+1)$ と $a_i = (-1)^i i^2$ より

$= -(-1)^{k+2}(k+1) - (-1)^{k+2}(k+1)^2 + (-1)^{k+2}(k+2)^2$ ◀ $(-1)^{k+1} = -(-1)^{k+2}$ より！

$= (-1)^{k+2}\{-(k+1) - (k+1)^2 + (k+2)^2\}$ ◀ $(-1)^{k+2}$ でくくった！

$= (-1)^{k+2}(-k - 1 - k^2 - 2k - 1 + k^2 + 4k + 4)$

$= (-1)^{k+2}(k+2)$

よって、$S_{k+1} + S_{k+2} = (-1)^{k+2}(k+2)$ が成立するので、① は $n = k+1$ のときも成立する。

以上より、すべての自然数 n において ① が成立する。（証明終）

帰納法の証明は受験でも超がつくくらい頻出です。

今回の問題でもそうだったけど、帰納法の証明は強引に変形していくことが多いです。慣れてしまえば簡単です。何問か帰納法の問題を解いて、慣れていっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司