「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a, b, c を実数とする。以下の問いに答えよ。
(1) $a+b=c$ であるとき、$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。
(2) $a+b \geqq c$ であるとき、$a^3+b^3+3abc \geqq c^3$ が成り立つことを示せ。

【（１）の解説】

等式の証明問題です。まずは、以下の事柄を確認しておいてください。

数学の必須事項

数学では、文字の種類が多いほどとにかく大変！文字の種類を減らせるときは、文字の種類を減らしてから考える !!

今回もこの鉄則に則って文字の種類を減らしていきます。$c=a+b$ なんだから、c のところを $a+b$ にします。

そうすると、元は文字の種類が a, b, c の３つだったけど、$c=a+b$ を代入すると文字の種類が a, b の２種類のみになります。文字の種類が３種類から２種類になるから簡単になるよね。

で、今回 c を消去したけど、なぜ c を消去したか分かる？$c=a+b$ となっているからなんて言う人もいます。でも、$c=a+b$ は $a=c-b$ と変形できるので a を消去することも可能だよね。もちろん、b も可能です。

で、今回の場合 $a^3+b^3+3abc=c^3$ で消去していくんだけど、a, b より c の方が出てくる回数が少ないよね。だから、$c=a+b$ と代入して消去していくけど、こうするのが一番

計算がラクになります。

そういった理由で c を消去しました。「えーそんなの大して変わらないじゃん。大げさに言いやがって … 」なんて思った人もいるかもしれません。

ただ、「どの文字を消去するかで計算量が大きく変わることがある。文字を消去する際、どの文字を消去すれば一番よいか？ということを常に確認することが重要」ということを言いたかっただけです。

今回の問題では、どの文字を消しても、計算量にそこまで大きく差がある訳ではありません。ただ、問題によっては、どの文字を消去するか、ということが本当に重要になってくることもあります。

受験では重要になることもあるので、今のうちに頭に入れておいてください。

【（１）の解答】

$a+b=c$ であるとき、$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成立することを示す。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a^3+b^3+3abc \\
&= a^3+b^3+3ab(b+c)\ \ (\because\ \ c=a+b) \quad \blacktriangleleft\ c\text{ を消去して、}a,b\text{ のみにした！} \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= c^3 \\
&= (a+b)^3\ \ (\because\ \ c=a+b) \quad \blacktriangleleft\ c\text{ を消去して、}a,b\text{ のみにした！} \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

以上より、$a+b=c$ であるとき、$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成立する。（証明終）

【（２）の解説】

（１）と同じように文字消去するのかな？と思うけど、（２）は文字消去できないよ。

（１）は $a+b=c$ と等式が与えられているけど、（２）は $a+b \geqq c$ と与えられているのは不等式だよね。不等式の場合文字消去できません。

だから、不等式が与えられているときは文字消去以外の解法で解いていかないといけません。

じゃあ、問題に戻るけど、今回は不等式だから文字消去できないんだよね。とりあえず、そのまま (左辺)−(右辺) をしてみることにします。

(左辺) − (右辺) $= a^3+b^3+3abc-c^3$ です。これを見た瞬間に「あっ、これは公式が使えるな」と気づいて欲しいです。

因数分解の公式

$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

今回の場合、c のところを $-c$ で置き換えると上記の公式が使える形になります。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= a^3+b^3+3abc-c^3 \\
&= a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c) \\
&= \{a+b+(-c)\}\{a^2+b^2+(-c)^2-ab-b\cdot(-c)-(-c)\cdot a\} \\
&= (a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)
\end{aligned}$$

で、$a+b \geqq c$ なんだから $a+b-c \geqq 0$ だよね。あとは、$a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca \geqq 0$ であることが言えたら今回の証明は終わりだよね。

これが０以上であることの証明は、超がつくくらいの頻出。覚えておかないとダメですよ。

有名な不等式の証明法

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqq 0$ であることの証明。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \\
&= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca) \\
&= \frac{1}{2}(a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \\
&= \frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}
\end{aligned}
$$

$\Uparrow$ 順番を入れ替えて因数分解の公式を使える形にした！

$$
= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \geqq 0
$$

＊まあ、頭のいい人だったら初めてでも気づける人もいるかもしれません。でも、普通は上記の式変形なんか思いつかないよね。

僕は、もちろん気づかなかった！というか「こんなん、絶対気づかへんわ!!」なんてキレてました（笑）。

数学ってよく考えることが重要！なんて言われます。でも、これって嘘ですよ。まあ、考えることが重要でないとは言いません。

ただ、考えるためには考えるだけの道具が必用なんです。これを勘違いしている人が多い。まあ、全統模試で偏差値７０いかない人は、まだまだ「考える」段階には到達してませんよ。まずは、暗記で十分です。

ちょっと、挑発的な書き方をしました。ごめんなさいね。でも、まだあまりできていない段階で「数学は考えることが重要！」なんて言って必要事項を覚えていない人がホントに多いです。

それじゃあ、いっこうに成績があがらないんです。数学が苦手な人（全統模試で６５ない人）は暗記で割り切ったらいいですよ。必要事項を暗記出来たら「ああ、これは暗記だけで解ける問題」「ああ、この問題は暗記では解けないから、考えて解かないといけないな」と判断できるようになってきます。頑張ってください。

【（２）の解答】

$a+b \geqq c$ であるとき、$a^3+b^3+3abc \geqq c^3$ を示す。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= a^3+b^3+3abc-c^3 \\
&= a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c) \\
&= \{a+b+(-c)\}\{a^2+b^2+(-c)^2-ab-b\cdot(-c)-(-c)\cdot a\} \\
&= (a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca) \\
&= \frac{1}{2}(a+b-c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab+2bc+2ca) \\
&= \frac{1}{2}(a+b-c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\} \\
&= \frac{1}{2}(a+b-c)\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\} \geqq 0 \quad (\because\ a+b \geqq c \text{ より } a+b-c \geqq 0)
\end{aligned}
$$

よって、$a+b \geqq c$ であるとき、$a^3+b^3+3abc \geqq c^3$ が成立する。（証明終）

（１）は文字消去できるので文字消去で解きました。ですが、（１）も（２）と同じ解き方でも解けます。

文字消去するときは文字消去するのが基本です。ただ、まれに文字消去できるときでも文字消去以外の解法があるときもあります。

問題をこなしているうちに「ああ、これは文字消去以外の解法もあるな」と気づけるようになってきます。だから、そこまで気にする必要はないですよ。

ちなみにこの問題は２００９年の東北大学理系の問題です。大問６問のうち１問がこの問題です。東北大学といった難関大学でも、これほど有名な典型問題を出してくることもあります。だから、まずは典型問題をしっかりとマスターすることにしてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあっ

てそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司