「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

$\triangle$ABC の内心を I、$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ とする。任意点を O とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $a,\ b,\ c,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を使って表せ。

【問題の解説】

ベクトルの問題で、内心の公式を導きなさいという問題です。三角形には５心（重心、内心、外心、垂心、傍心）があります。

この中で、ベクトルの問題で出題されやすいのは重心、内心、外心です。そして、重心と内心には公式があります。結果そのものも重要ですが、導き方も重要です。今回は、その中で内心の公式を導きなさいという問題です。

内心については、知っている人も多いとは思いますが、一応まとめておきます。

内心について

内心とは、内接円の中心のことで、角の２等分線の交点である。

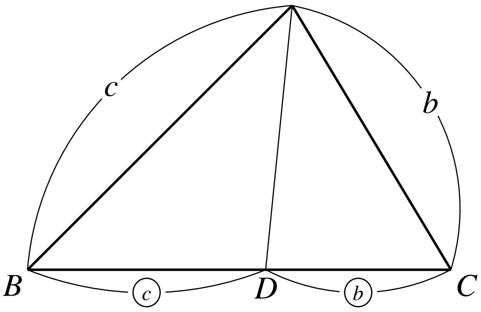
また、内心は I で表すことが多い

＊ちなみに、外心は垂直２等分線の交点です。内心と混同しやすいので、注意して下さい。

最終的に、$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を求めるんですが、まずは $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めていきます。

知ってると思うけど、以下の角の２等分線の性質をかいておきます。

角の２等分線の性質



左図のように、$AB = c, AC = b$ で、AD が $\angle$A の２等分線のとき $BD : DC = c : b$ が言える。

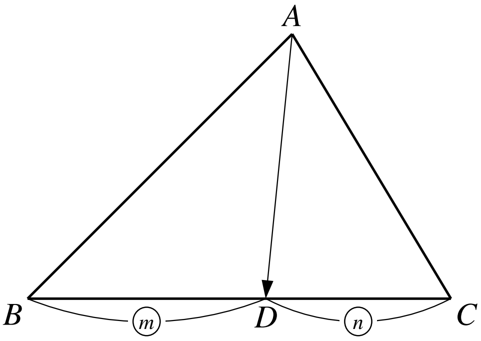
これは、逆も成立します。
つまり、$BD : DC = c : b \Rightarrow AD$ は $\angle$A の２等分線である。

角の２等分線は、他にもないことはないですが、ほとんどの場合上記の性質を使って解いていきます。数学は、与えられた条件は必ず使います。角の２等分線で使える性質としては上記くらいしかありません。

ですから、角の２等分線と問題文で与えられた時点で、「ああ、おそらくこの性質を使うんだなぁ」と思えるようになっておいてください。

次に、ベクトルの内分の公式です。

ベクトルの内分の公式



左図のように、D は BC を $m : n$ に内分する点。

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

上記の公式は、本当によく使う公式ですが、なぜ成立するか？ということを知らない人が多いです。簡単に証明できるので、一応証明をしておきます。

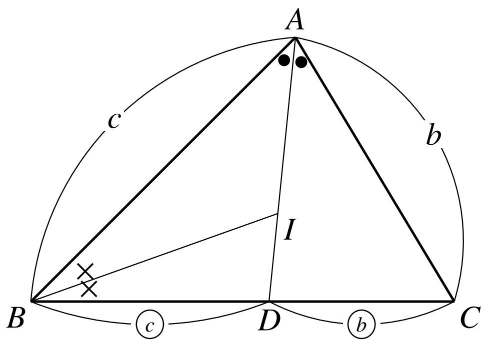
【ベクトルの内分の公式の証明】

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ◀ BC を $\dfrac{n}{m+n}$ 倍したら BD になるので、$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ ◀ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の始点を A に変更した

$= \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ◀ 公式が導けた！

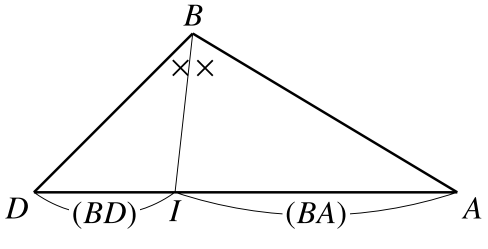


それでは、この内分の公式を使ってまずは、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を求めたいと思います。

内分の公式より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となります。

まずは、$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めることを目標とします。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が求まっているので、$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めるには $AI : ID$ が分かれば $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めることができます。

そこで、$AI : ID$ を求めたいんだけど、I は内心なので、BI は角 B の 2 等分線だよね。だから、角の 2 等分線の性質より $AI : ID = BA : BD$ になるよね？どういうふうに考えたのかというと $\triangle\mathrm{BAD}$ で考えました。もし分かりにくいという人は、次のように図をかきなおすと理解できると思います。

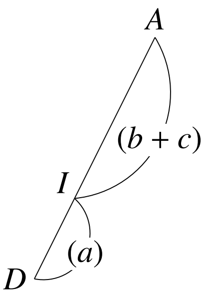


上図より、$AI : ID = BA : BD$ となります。$BA = c$ って分かってるけど BD は、まだ長さ

が分かっていないので求めることにします。BD は $BC(=a)$ を $c:b$ に内分する点なので $BD=\dfrac{c}{c+b}a$ となります。

$BA=c,\ BD=\dfrac{c}{b+c}a$ より、$AI:ID$ を求めたいと思います。例えば $4:2=2:1$ となるようにかけたり、割ったりすることは自由です。このことを頭に入れて、

$$
\begin{aligned}
AI:ID &= BA:BD \\
&= c:\frac{c}{b+c}a \blacktriangleleft BA=c,\ BD=\frac{c}{b+c}a \text{ をそれぞれ代入} \\
&= 1:\frac{a}{b+c} \blacktriangleleft \text{両方とも } c \text{ が含まれているので、} c \text{ で割った} \\
&= b+c:a \blacktriangleleft \text{分数だと考えにくいので、両方に } b+c \text{ をかけた}
\end{aligned}
$$



上図より、$\overrightarrow{AD}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AI}$ となる。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD} \blacktriangleleft AD \text{ を } \frac{b+c}{a+b+c} \text{ 倍すれば } AI \text{ になる} \\
&= \frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right) \blacktriangleleft \text{これで、} \overrightarrow{AI} \text{ を求めることができた！}
\end{aligned}
$$

これで、$\overrightarrow{AI}$ を求めることができました。後は、ここから $\overrightarrow{OI}$ を求めたらいいのですが、始点を O に変更して整理するだけです。

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{a+b+c}\left\{b(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + c(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\right\}$$ ◀ 始点を O にした！

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{a+b+c}\left\{b(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + c(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\right\}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$ ◀ これが答え！

少々長かったですが、これで $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を求めることができました。O が任意点というのがよく分からないという人もたまにいますが、O はどこにあってもこの公式は成立しますよ、ということです。

例えば、O が A と一致しているときを考えます。一致しているので、$O = A$ となります。

$$\overrightarrow{A\mathrm{I}} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{A\mathrm{A}} + b\overrightarrow{A\mathrm{B}} + c\overrightarrow{A\mathrm{C}}\right)$$ ◀ 内分の公式で O を A に置き換えた！

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$ ◀ $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$ です。これで、$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ が求まった！

この $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ は、問題を解くときに求めましたがそれと一致しています。この公式さえ覚えておけば、内心は一瞬で求めることができます。ただ、導き方の過程もとても重要で、試験にもよく出てきます。慣れてくれば簡単です。何度か解いてしっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司