「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

図形のベクトルを求める問題を解説

今回は、苦手にしている人が多い図形のベクトルを求める問題を３問、解説していきます。

非常に基本的な問題ですが、ちゃんと理解できている人が少ないです。しっかりと理解しておいてください。

問題 1

$\triangle$OAB がある。辺 OA を 3 : 2 に内分する点を P、辺 OB を 5 : 1 に内分する点を Q とし、線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。さらに、線分 OR の延長が辺 AB と交わる点を S とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

【問題 1 の解説】

今回求めるベクトルは、（１）（２）ともにとある直線上にあるよね。こういうときは、今から解くように解くということを覚えておいてください。

まずは、内分の公式を書いておきます。

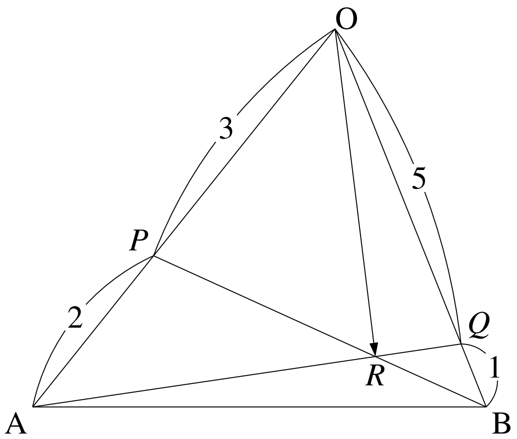
内分の公式について

線分 AB を $m:n$ に内分する点が C である。

このとき、$\overrightarrow{OC} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ である。

ただし、O は任意点。

上記の内分の公式はしょっちゅう出てくるから覚えておいてくださいね。それでは、今回の三角形を図示してみたいと思います。



点 R は、上図のように線分 AQ 上の点であり、かつ、線分 PB 上の点です。

こういったタイプの問題は、求めるベクトルを2通りで表して、係数を比較して解いていきます。

どういうことかと言うと、今回の点 R は線分 AQ 上の点であり、かつ、線分 PB 上の点でもあるんだよね。これを使って2通りの方法で $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を表して解いていきます。

ちょっと、この説明では分かりにくいと思うので、実際に問題を解いていくことにします。まずは、点 R が線分 OR 上にあるという条件を使います。

さっきの内分の公式を使うためには、$AR:RQ$ が必要だよね。でも、$AR:RQ$ は分かっていないので自分でテキトウに設定して解いていくことにします。

とりあえず$AR:RQ=a:b$などとしてもいいんだけど、一般的に数学って文字の種類が少ないほど考えやすいんだよね。

今、a と b の文字２つを使ったけど、ひとつの方がラクです。

そこで、$AR:RQ=t:1-t$ とでもすることにします。こんなことしていいの？なんて思うかもしれませんが、今回のように ◯ : ◯ のときは OK です。

例えば $4:2=2:1$ とできるように、何対何というのは両方に同じ数をかけたり、割ったりすることは自由なんだよね。だから、さっきの $4:2$ も $2:1$ にしてからさらに３で割ると、$\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ とすることができます。

なんでこんな強引な変形をしたのかと言うと、$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ だよね。
だから、$\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}:1-\frac{2}{3}$ と $t:1-t$ の形で表すことができるよね。

どんなものでも、この $t:1-t$ の形で表すことができます。内分の公式を使えば分かるけど、こういうふうにおけば先ほどの内分の公式の $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で分母の $m+n$ の部分が１になってくれるので計算がラクです。

だから、こういうふうな内分は $t:1-t$ or $1-t:t$ として解いていきます。

たまに「$t:1-t$ と $1-t:t$ とどっちでおけばよいか分からない」という人がいます。これって、計算が簡単になる方を選んだだけですよ。今回の問題は、すべてのベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のみで表します。点 Q は辺 OB を $5:1$ に内分するから $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ です。

まずは、$AR:RQ=t:1-t$ でやっていきます。

内分の公式より、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1-t}{t+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{t+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots①$ です。

次に、$AR:RQ=1-t:t$ と置いてみます。同じく内分の公式より $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1-t}{(1-t)+t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1-t}{t+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots$ ② となります。

で、①, ② を見た欲しいんだけど $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ はさらに $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となおさないといけないです。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の方がすこし複雑です。さらに t と $1-t$ なら $1-t$ の方が複雑です。複雑なものどうしをペアにすると計算がメンドウになってしまいます。

② は $1-t$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ がペアになって複雑なものどうしがペアになっています。これを避けるために ① の複雑なものと、複雑でないものがペアになるようにします。

＊ $t:1-t$ の置き方ととしては上記のルールの通りです。ただ、どっちで解いても、ジャッカン計算量が変わってくるくらいで、どっちでも解けてしまいますよ。今回のようにどっちが複雑か分かるときはよいのですが、どっちが複雑か分かりにくいときもあります。そんな場合は、「こっちの方がラクっぽい」というようなテキトウなやり方で大丈夫ですよ。計算量の差は高々しれています。

点 R が線分 AQ 上にあるという条件を使うために $AR:RQ=1-t:t$ とおいて、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{5t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せました。

最初に話したけど、ベクトルを求めるときは求めるベクトルを 2 通りで表して、係数を比較して解いていくんだったんだよね。今、1 通りは表すことができました。次に、もう 1 通り表していかないといけません。

点 R は、線分 AQ と線分 BP の交点なんだよね。今、点 R が線分 AQ 上という条件を使って $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表しました。あと 1 通りやらないとダメなんだけど、これは点 R が線分 AQ 上ということを使って解いていきます。

さっきと同じく $PR:RS$ を文字を使っておかないとダメです。さっき t を使ったので今度は s を使います。$PR:RB=1-s:s$ とします。$PR:RB=s:1-s$ とすると、メンドウなものどうしがペアになるので、やめておいた方がよいです。

内分の公式を使うと $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{s}{(1-s)+s}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \dfrac{1-s}{s+(1-s)}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{3s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

これで、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を 2 通りの方法で表すことができました。後は係数を比較するだけです。ただ、ベクトルで係数を比較するときは必ず気を付けないといけないことがあります。

ベクトルの係数比較

$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}$

$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$ のとき、$s = s', t = t'$ がいえる。

⇑ ベクトルで係数比較をするとき、$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を満たしている必要があります。ちなみに、この部分を一言で「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立である」と書いてもらってもいいです。

何も考えずにボーっとしていたとしても $\vec{0}$ を使うことはまずないですし。また、平行なベクトルを使うこともありません。だから、ほとんどの場合まず間違いなく $\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}$ が言えています。ただ、この文言を書かずに係数比較したら大幅に減点されますよ。気を付けてくださいね。

ちなみに、$\vec{0}$ や平行だったら係数比較できない理由は分かるよね。例えば $\vec{a} = \vec{0}$ のとき、$i\vec{a}$ は i にどんな実数が入ったとしても $i\vec{a} = \vec{0}$ です。だから、$s = s'$ でなくてもどんな数でも成立してしまいます。

次に、$\vec{a} \parallel \vec{b}$ のときです。2 つのベクトルが平行なときは、k を実数として $\vec{a} = k\vec{b}$ と表されるんだよね。例えば、今回 $k = 2$ つまり $\vec{a} = 2\vec{b}$ だったとします。

このとき、$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$ は $(2s+t)\vec{b} = (2s'+t')\vec{b}$ となります。$2s + t = 2s' + t'$ が成立していたら OK です。もちろん、$s = s'$ や $t = t'$ のときも成立します。でも、それ以外に例えば $s = 2, t = -2, s' = 1, t' = -2$ などでも等式が成立してしまいます。$s = s', t = t'$ 以外でも成立するものが出てきます。だから、平行なときも係数比較することはできません。

まあ、理由を話せばこんな感じです。ただ、「ベクトルで係数比較するときは、<u>必ず答案に $\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を記入する！」と覚えておいて</u>くださいね。大幅に減点されてしまいますよ。

【問題１（１）の解答】

$AR : RQ = t : 1 - t$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1-t}{t+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t}{t+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots ①$$

$PR : RB = 1 - s : s$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{s}{(1-s)+s}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1-s}{s+(1-s)}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots ②$$

$\vec{OA} \neq \vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq \vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるので、①, ② より

$1 - t = \frac{3}{5}s,\ \frac{5t}{6} = 1 - s$

これを解いて $t = \frac{4}{5},\ s = \frac{1}{3}$

⇑ 連立方程式は各自解いておいてください。図より $0 < s < 1, 0 < t < 1$ となることは明らかです（内分するので）。だから、もし、$0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たしていなかったらどこかで間違えていると思えるようになってくださいね。

$t = \frac{4}{5}$ を ① に代入すると、$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

⇑ s, t どちらか一方の値だけで $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は求められます。ただ、計算間違いを防ぐために、時間がない場合を除き、両方ともに代入をして答えが一致するかどうか確認するようにしてください。

【問題１（２）の解説】

これも $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を求める問題です。$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を文字を使って２通りの方法で表して係数比較しても解くことができます。

もちろんこの解法で解いてもらっても OK です。ただ、この直線上にあるときは、便利な解き方があります。以下を覚えておいてください。

点が直線上にあるとき

O は任意点。点 P は直線 AB 上の点である。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表されるとき、$s + t = 1$ が成立する。

上記は直線 AB で成立します。ただ、今回のように辺上にあるときもよく出てきて、この性質を使います。今回、点 S は辺 AB 上の点なんだよね。だから、係数をふたつ足せば 1 になりますよ。

ちなみに、今回の点 S は「直線 OR 上、かつ、線分 AB 上」です。だから、この２つの条件を使わないといけません。係数の和が 1 というのは後者の「線分 AB 上」という条件を使っています。後は、前者の「直線 OR 上」を使って式を作らないとダメです。

でも、これは簡単だよね。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を何倍かすれば $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ になるんだから、$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ です。後は、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数の和が 1 であるということを使って解いていきます。それでは、解答に進みます。

【問題１（２）の解答】

点 S は、直線 OR 上の点であるので k を実数として、$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せる。

点 S は、辺 AB 上の点であるので、$\frac{k}{5} + \frac{2k}{3} = 1$ である。これを解いて、$k = \frac{15}{13}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{\frac{3}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{10}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

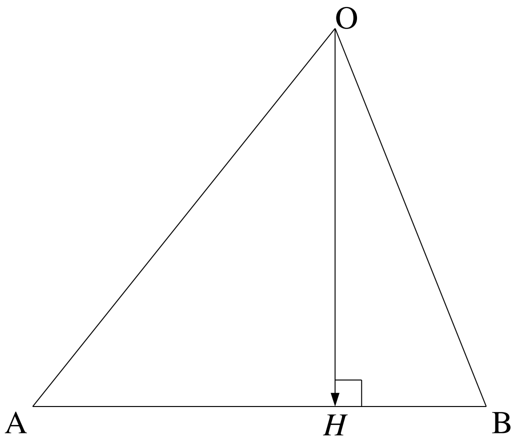
＊この問題は、数学 A で勉強をしたチェバ・メネラウスの定理を使ったらもっと簡単に解くことができます。実際のベクトルの受験問題では、チェバ・メネラウスで解けるように簡単な問題はあまり出題されません。

だから、あえて基本通りのベクトルの解法で解きました。とにかく、交点のベクトルはこういうふうに２通りの方法で表して係数を比較です。覚えておいてください。この解法で百パーセント解けますよ。

問題 2

$OA = 5, AB = \sqrt{21}, BC = 4$ の $\triangle$OAB がある。頂点 O から辺 AB に下ろした垂線の足を H とする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を使って表せ。

【問題 2 の解説】



突然ですが、以下のことを覚えておいてください。

ベクトルの問題の考え方

ベクトルの問題で、垂直と来たらほぼ間違いなく、(内積) = 0 を使う !!

今回の場合、$AB \perp OH$ だよね。だから、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$ ですよ。

H は辺 AB 上の点だけど、どこにあるか分からないよね。だから、例えば $AH : HB = 1-t : t$ とでもして解いていきます。

こういうふうにおくときは、面倒くさいものどうしをペアにしないというものがあったよね。でも、今回の場合、どっちもメンドウではありません。だから、$AH : HB = 1-t : t$ としても、$AH : HB = t : 1-t$ としても OK ですよ。

後、この問題では $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値が必用です。まず、内積の値を求めてから解いていくことにするね。

内積の解き方は余弦定理を使って求めてもいいです(＊内積を求めるときは、余弦定理でコサインの値を求めることが多いです。ベクトルで、突然三角比の余弦定理が出てきますが、びっくりしないようにしてください)。

余弦定理は分かると思うので、今回は $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{21}$ で内積を求めていきます。左辺の始点を O に変更して両辺を 2 乗すれば内積を求めることができますよ。

余弦定理で解く解法も、この始点を変更して両辺を 2 乗する解法も両方とも覚えておいてくださいね。

【問題２の解答】

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{21}$$

$$\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{21}$$ ◀ 始点を O に変更した！

$$\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right|^2 = 21$$ ◀ 両辺を 2 乗した！

$$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = 21$$

$$4^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 5^2 = 21$$

$$-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -20$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 10$$ ◀ これで内積の値が求まった！

$AH : HB = 1 - t : t$ とする。$\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$

$AB \perp OH$ より、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OH} = 0$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot \{t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} = 0$$

$$t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - t\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

$$10t + 16(1-t) - 25t - 10(1-t) = 0 \ \left(\because \ \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 5,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 4,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10\right)$$

$$-21t = -6$$

$$t = \frac{2}{7}$$

$t = \frac{2}{7}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に代入すると、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$ である。

問題３

$AB = 3, AC = 2, \angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ の三角形の外心を O とする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

【問題３の解説】

問題に進む前に、外心についてまとめておきます。

外心について

外心とは、外接円の中心のことで、垂直２等分線の交点である。

O が $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心である $\Leftrightarrow$ $OA = OB = OC$

外心は垂直２等分線の交点であるということは覚えておかないとダメですよ。

ただ、外心が問題できた場合この垂直２等分線よりも、下の「O が $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心である $\Leftrightarrow$ $OA = OB = OC$」を使うことが多いです。

まあ、あくまで経験則ですが８対２くらいの割合で下の方を使うような気がします。問題で「外心」と出た瞬間に２つを思い出して、「どっちを使って解くのかな？」と考えられるようになっておいてくださいね。

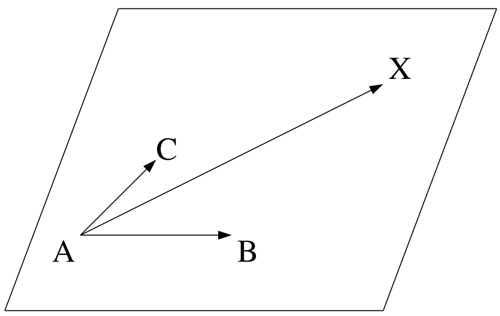
今回はどっちの解法でも解くことができますが、前者の「垂直２等分線」を使って解く解法の方がラクです。少しテクニック的な解法です。ベクトルで外心がきたら、こうやって解くということを覚えておいてください。

それでは、問題に進みます。今回の外心は、今までの問題１や問題２と違いどこかの線分上にあるという訳ではないよね（もちろん、垂直２等分線上の点ではあります。ただ、これを使うのはややこしそう）。

だから、今までのように $1-t:t$ なんておくことは無理です。そこで、とりあえず、$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくことにします。

ベクトルの性質

右図のように３つの定点 A, B, C で定められる平面がある。



ただし、３点 A, B, C は異なる点で、３点は一直線上にない。(これをベクトル表記すれば、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} \neq \vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} \nparallel \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ です。つまり、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が１次独立です。３点が与えられても、３点がこの条件を満たさないと平面はひとつに定まりません) 平面上の任意点 X は、適当な実数 x, y を使って $\overrightarrow{\mathrm{AX}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表される。また、このときの x, y は一意的である。

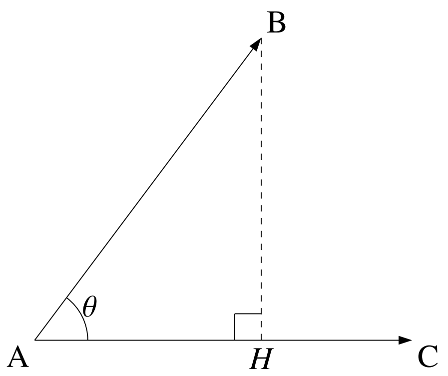
⇑ 今回の問題で、$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおいたよね。こうおける説明です。

上記では $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を使って $\overrightarrow{\mathrm{AX}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されるとしました。でも、別に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ でなくても平面上のベクトルで一次独立であればどんなベクトルでもいいです。

また、最後の「一意的」ですが、x, y はただひとつの値に決定するということですよ。ある定点 X が、$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されるとき、x, y は 1 通りの表し方しかありません。

では、次の内積の図形的意味について話していきます。

内積の図形的意味



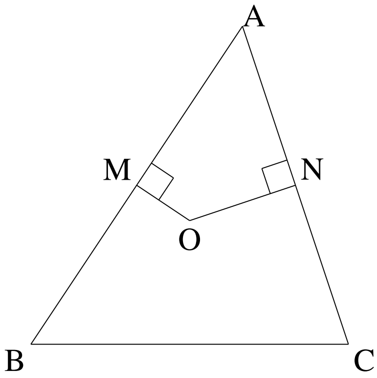
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、左図のように点 B から線分 AC（あるいはその延長）に下ろした垂線の足を H とする。

このとき、$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{AH}}\right|$ となる。

上で言っていることは難しそうですが、ごくごく簡単ですよ。まず、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \cos\theta$ なんだよね。

で、直角三角形 ABH に着目して欲しいんだけど、$\cos\theta = \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}$ ってなるよね。だから、$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cos\theta$ です。

これより、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|$ となります。これは、たまに出てくるので覚えておいてくださいね。



点 O は外心です。外心は垂直２等分線なので、点 O から辺 AB, AC に下ろした垂線の足を M, N とすると、M, N はそれぞれ辺 AB, AC の中点です。

先ほどの内接の図形的性質を使うと、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|,\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AN}}\right|$ となります。これで、問題が解けるので、解答に進みます。

【問題３の解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 60^\circ=3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=3$

⇑ 内積の値が必用になるので、まず求めておきました。

点 O から辺 AB, AC に垂線を下ろしその足を M, N とする。点 O は外心なので、M, N はそれぞれ辺 AB, AC の中点となる。

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする。

⇑ 点 O はどの直線上にあるか分からない！分かるときは $1-t:t$ を利用するが、分からないときはこう置くくらいしかない！

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|$$ ◀ 内積の図形的性質より！

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\cdot\frac{3}{2}$$ ◀ M は AB の中点より、$AB=3$、$AM=\dfrac{3}{2}$

$$(x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{9}{2}$$ ◀ $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より！

$$x\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{9}{2}$$

$$y=-3x+\frac{3}{2}\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AN}}\right|$$ ◀ 内積の図形的性質より！

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2 \cdot 1$$ ◀ N は AC の中点より、$AC = 2$、$AN = 1$

$$(x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2$$ ◀ $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より！

$$x\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + y\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 2$$

$$3x + 4y = 2 \cdots ②$$

① を ② に代入する。

$$3x + 4\left(-3x + \frac{3}{2}\right) = 2$$

$$3x - 12x + 6 = 2$$

$$x = \frac{4}{9}$$

$x = \frac{4}{9}$ を ② に代入する。

$$3 \cdot \frac{4}{9} + 4y = 2$$

$$y = \frac{1}{6}$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ である。

＊外心のベクトルの問題は上記のように解くのが一番ラクです。ただ、「外心は三角形の３頂点からの距離が等しい」という条件を使って $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ を使っても解くことができます。

この解法の場合、始点を A にしてからすべての辺を２乗すれば解くことができます。

ただ、やってもらえば分かると思うけど、計算がかなり大変ですよ。内積の図形的性質など、少しテクニック的な部分もありますが、外心は今解いた解法で解くということを覚えておいてください。

今回の解説プリントはこれで終わりです。今回のようなベクトルを求める問題は、受験

でも頻出ですよ。テキトウにしか理解していない人が多いです。しっかりと理解しておいてくださいね。頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司