「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

正の数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの積を b_n とおくとき、条件

$$2a_nb_n = a_n + 3b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

がみたされている。このとき次の問いに答えよ。
(1) a_1 を求めよ。
(2) 数列 $\{b_n\}$ のみたす漸化式を求めよ。
(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n の式で表せ。
(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。

【問題の解説】

まあ、なんだか分かりにくい問題です。

＊分かりにくいと言ったのは、数列 $\{b_n\}$ が、$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの積という設定です。

あまり見かけない設定です（個人的にも初めて見ました）。そんなときは、「どうするんだろう？」と自分で丁寧に解いていくしかないですよ。

b_n を具体的に書き出すと、$b_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ なんだよね。積の形では、考えにくいので両辺の対数をとるのかな？なんていうことも思いつきます。

積では考えにくいです。対数をとることによって和の形になります。積より和の方が考えやすいので、両辺の対数をとる、というのは常套手段です。

ただ、今回の場合は使うかどうかは分かりません。(１)、(２)… と設問が与えられているので、ひとつずつ解いていくことにします。

【問題（１）の解答】

＊ b_n は、初項から第 n 項までの a_n の積です。$n = 1$ のとき、$a_1 = b_1$ が言えます。これで求めていきます。

$2a_nb_n = a_n + 3b_n \cdots ①$ とする。

① で $n = 1$ のとき

$$2a_1b_1 = a_1 + 3b_1$$
$$2a_1 \cdot a_1 = a_1 + 3a_1 \quad (\because \ a_1 = b_1)$$

また、$\{a_n\}$ は正の数列より、$a_1 > 0$ なので $a_1 \neq 0$

⇑ これで、両辺を a_n で割れます。等式の両辺を文字式で割るときは、その文字式が０になるかどうか、確認しないとダメですよ。

$2a_1 = 1 + 3$ となる。つまり、$a_2 = \mathbf{2}$ である。

【問題（２）の解説】

漸化式は解法が決まっているものがあって、それを覚えておかないとダメだったんだよね。漸化式の解法を覚えていないという人は、以下のプリントを見てください。

漸化式のプリント
問題編 https://hmg-gen.com/mondai-zenkasiki.pdf
解答編 https://hmg-gen.com/zenkasiki.pdf

ただ、今回の問題は、パッと見たところ、どのパターンで解いていくのか分かりません。

漸化式で、よくわからないとき、a_1, a_2, a_3 などを計算して、予測して帰納法にもちこむという解法があります。

でも、今回はこのやり方ではやらないと解く前から分かります。問題で、「数列 $\{b_n\}$ のみたす漸化式を求めよ」となっているからです。

この予想して帰納法で解く方法だと、漸化式は求まりません。だから、今回の問題は、この解き方ではないということがわかります。

後、さっきも少し書きました。b_n が積の形になっているから、両辺の対数をとるのかな？と考えるかもしれません。ですが、今回の場合、式の形からして両辺の対数をとることはありません。

$A = B$ のとき、両辺の対数をとって $\log_a A = \log_a B$ とすることはあります。ですが、$A = B + C$ のとき、$\log_a A = \log_A(B + C)$ とすることはあまりないです。

この変形は数学的に間違っているという訳ではありません。ただ、右辺の $\log_a(B + C)$ で真数の中が和を含んだ式になっています。通常、真数の中に和や差を含んでいる式がきてもうまくいかないことが多いです。

だから、こういうときは両辺の対数をとることはありません。

で、どうしようかな？と思うんだけど、シンプルに $b_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$ を ① の $2a_nb_n = a_n + 3b_n$ に代入したら解けてしまいますよ。

まあ、この解法は最初から思いついた人もいると思います。

「帰納法？」「対数をとる？」なんて話をあえて紹介しました。数学の問題の考え方を理解しておいて欲しかったからです。

数学の問題を解くときに、「こうしたら解けるかな？」と思えるものがあれば、実際にそれでやってみます。それで解けたら OK ですし、解けなかったらその時点でまた別の解法を考えます。

この思考過程を知って欲しいから、あえていろいろな解法を紹介しました。それでは、解答に進みます。

【問題（２）の解答】

①より

$$
\begin{aligned}
2a_n b_n &= a_n + 3b_n \\
2a_n \times a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n &= a_n + 3a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} a_n \\
2 \times a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n &= 1 + 3a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \quad (\because \{a_n\} \text{は正の数列より、} a_n \fallingdotseq 0) \\
2b_n &= 1 + 3b_{n-1}
\end{aligned}
$$

⇑ 少し気付きにくいけど、$b_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ より、$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} = b_{n-1}$ ですよ。この式が成立するのは $n \geqq 2$ のときです。

よって、数列 $\{b_n\}$ のみたす漸化式は $\boldsymbol{b_n = \frac{3}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2} \ \ (n \geqq 2)}$ である。

【問題（３）の解答】

＊（２）のまま解いてもいいけど、いつも通りの $n+1$ の式と n の式の形に持ち込みます。そうするには、n を $n+1$ で置き換えたらいいですよ。

$b_n = \frac{3}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2} \ \ (n \geqq 2)$ で n を $n+1$ で置き換える。

$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2} \ \ (n \geqq 1)$

＊ここからは、一番基本的な漸化式です。もし、分からない人は先ほど紹介した漸化式のプリントを復習しておいてください。

特性方程式より $\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$。これを解くと $\alpha = -1$

よって、$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}$ は $b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$ と変形できる。

（１）より $a_1 = 2 = b_1$。$b_1 + 1 = 3$ である。よって、数列 $\{b_n + 1\}$ は初項3、公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列である。

よって、$b_n + 1 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ つまり $\boldsymbol{b_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}$

【問題（４）の解説】

当然（３）までの結果を使って解いていくよ。

で、どうしようかな？と思うんだけど、$b_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$ なんだよね。で、$b_{n-1} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}$ となるよね。

これを、$b_n = \underline{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} \cdot a_n$ に代入すると、$b_n = b_{n-1}a_n$ つまり $a_n = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ です。

⇑ 上記の $b_n = \underline{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} \cdot a_n$ の下線のあるところが b_{n-1} と一致しています。

b_n が分かっているので、n を $n-1$ で置き換えると b_{n-1} も分かります。これで、a_n を求めることができます。ただ、b_{n-1} は $n \geqq 2$ で定義される式なので、$n = 1$ のときと $n \geqq 2$ のときとで場合分けをして考えます。

【問題（４）の解答】

（３）より $b_n = 3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 = \dfrac{3^n - 2^{n-1}}{2^{n-1}}$

⇑ 全体を分数で表していた方が、のちのち計算がラクになるので、b_n を分数で表記しました。

$n \geqq 2$ のとき、$b_{n-1} = \dfrac{3^{n-1} - 2^{n-2}}{2^{n-2}}$ となる。

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{b_n}{b_{n-1}} \\
&= \frac{3^n - 2^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^{n-2}}{3^{n-1} - 2^{n-2}} \\
&= \frac{3^n - 2^{n-1}}{2(3^{n-1} - 2^{n-2})}
\end{aligned}
$$

$n = 1$ のとき（１）より、$a_1 = 2$ となる。$\dfrac{3^n - 2^{n-1}}{2(3^{n-1} - 2^{n-2})}$ に $n = 1$ を入れて計算すると 2 になる。

よって、$n = 1$ のときも $a_n = \dfrac{3^n - 2^{n-1}}{2(3^{n-1} - 2^{n-2})}$ は成立する。

以上より、$a_n = \boldsymbol{\dfrac{3^n - 2^{n-1}}{2(3^{n-1} - 2^{n-2})}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

今回の問題は、少し変わった問題でした。変わった問題というか、典型問題とは違う問題です。だから、その場で考えていかないと解けない問題です。

「その場で考えないといけない」と言いました。そこまで難しくなく、いたって簡単な考えて解くことができる問題でした。ただ、気づきにくい人にとっては少し難しい問題だったと思います。

受験問題とはこういったものです。こういった問題に慣れておくようにしてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司