「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

平面上に長さ３の線分 OA を考え、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ と表す。$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ２のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ をなすようにとり、点 B を $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし、線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき、どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。

【問題の解説】

なんだかややこしい問題文だけど、最後の「$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならない」と言っています。

これを使うには $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が必要です。まず、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を求めていくことにするね。

ただ、その前に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の成分があったほうがラクだよね。

$O(0,0), A(3,0), B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ として解いていきます。

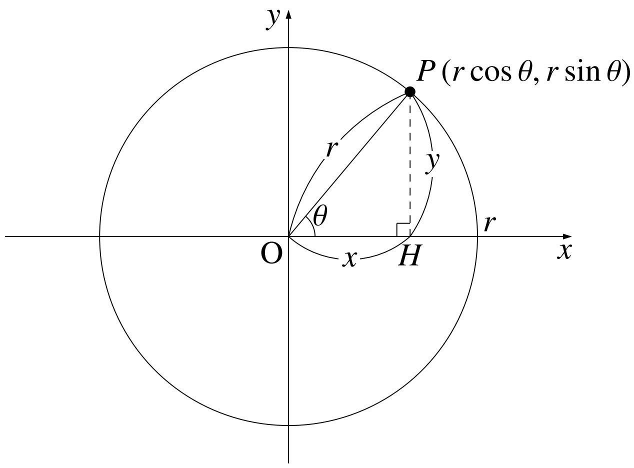
今回 $OA = 3, OB = 2, \angle\mathrm{AOB} = \theta$ なんだよね。だから、上記のようにしてもらって OK です。

＊今回は、$OA = 3, OB = 2, \angle\mathrm{AOB} = \theta$ です。こんなとき、自分の考えやすいように座標を設定することがあります。

$O(0,0), A(3,0), B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ としても、$OA = 3, OB = 2, \angle\mathrm{AOB} = \theta$ を満たしているので OK ですよ。

$B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ とおける訳を話しておきますね。これは、円の媒介変数表示と呼ばれるものです。知らない人は覚えておいてください。

円の媒介変数表示



左図のように点 P が第 1 象限にあり、線分 OP が x 軸の正の向きとなす角が θ のとき、

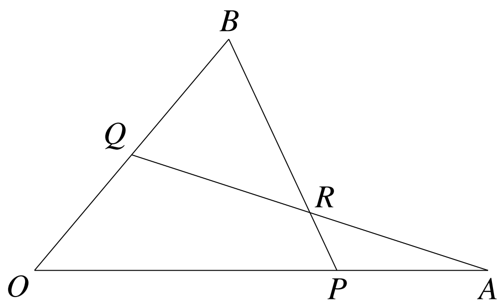
$\cos\theta = \dfrac{OH}{OP} = \dfrac{x}{r}$ より、$x = \boldsymbol{r\cos\theta}$

$\sin\theta = \dfrac{PH}{OP} = \dfrac{y}{r}$ より、$y = \boldsymbol{r\sin\theta}$

これは、点 P が第 1 象限にないときも成立します。

これを理解していたら、$B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ とおけることはわかると思います。また、点 Q は辺 OB の中点なので、$Q(\cos\theta, \sin\theta)$ とおけます。

それでは、今回の問題を図示してみます。



今回は、まず $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が必用なので、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を求めていきます。

点 R が線分 QR 上と線分 BP 上という条件を使って $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を 2 通りの方法で表して係数を比較するという方法で解いていってもかまいません。

ただ、今回はメネラウスの定理を使えるので、メネラウスの定理で解いていくことにします。

＊ベクトルの問題のオーソドックスな解法は、ひとつめの 2 通りで表して係数比較ですよ。これの解法が分からないという人は、ベクトルのプリント
https://www.hmg-gen.com/merumaga2b-23.pdf で勉強をしておいてください。

メネラウスの定理より $\dfrac{OB}{BQ}\cdot\dfrac{QR}{RA}\cdot\dfrac{AP}{PO}=1$ が成立します。

点 Q は辺 OB の中点なので $\dfrac{OB}{BQ}=\dfrac{1}{2}$ が言えます。また、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$ より、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=3\left|\vec{a}\right|$ が言えます。$\left|\vec{a}\right|=3$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=3t$ です。

また、$AP=OA-OP$ より $AP=3-3t$ が言えます。これより、$\dfrac{AP}{PO}=\dfrac{3-3t}{3t}$ が言えます。

これらを先ほどのメネラウスの定理の式 $\dfrac{OB}{BQ}\cdot\dfrac{QR}{RA}\cdot\dfrac{AP}{PO}=1$ に代入して整理すると、$\dfrac{QR}{RA}=\dfrac{t}{2(1-t)}$ つまり $QR:RA=t:2(1-t)$ となります。

$QR:RA=t:2(1-t)$ と分かったので、ベクトルの内分の公式を使って整理すると $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2(1-t)}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となります。

さらに、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,0), \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\cos\theta,\sin\theta)$ を代入すると、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{3t+2(1-t)\cos\theta}{2-t},\dfrac{2(1-t)\sin\theta}{2-t}\right)$ となります。

で、今回は $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないと言っているんだよね。このとき、内積が 0 でなければいいんだよね。

内積の公式（成分）

$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ のとき、$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boldsymbol{x_1 x_2 + y_1 y_2}$ である。

この公式を使って $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を求めると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{(12t-6)\cos\theta - 13t + 4}{2-t}$ となります。

これが 0 とならないときは、分子の $(12t-6)\cos\theta - 13t + 4$ が 0 とならなければ OK です。で、ここからはいくつかの考え方がありますが、以下のように解くのが一番ラクです。

$\cos\theta = x$ とでも置換します。$0 < \theta < \pi$ なので、当然 $-1 < x < 1$ です。$(12t-6)\cos\theta - 13t + 4 = (12t-6)x - 13t + 4$ となります。

$f(x) = (12t-6)x - 13t + 4$ とでもします。$f(1) = -t - 2$ です。今、t は $0 < t < 1$ より $f(1) < 0$ です。で、今 $f(x)$ が 0 とならなかったらいいんだよね。

今、$f(1) < 0$ が言えています。もし仮に $f(-1) > 0$ だとしたら $-1 < x < 1$ において $f(x) = 0$ となることがあるよね。だから、$f(-1) \leqq 0$ です。
⇑ 1 次関数です。直線のグラフを考えたら当たり前です。$f(x) = (12t-6)\cos\theta - 13t + 4$ です。$y = f(x)$ は傾き $12t - 6$ の直線です。傾きの正負は分からないけど、もし仮に $f(-1)$ と $f(1)$ が異符号なら $f(x)$ が 0 になることがあるということです。

$f(x)$ が $-1 < x < 1$ で 0 とならないとき $f(-1)$ と $f(1)$ がともに正かともに負のいずれかです ($f(-1)$ が 0 で、$f(1) > 0$ または $f(1) < 0$ となるときなども OK。イコールが入るかどうかは注意してください)。今、$f(1)$ が負と分かっているので $f(-1)$ が 0 以下になるしかありません。

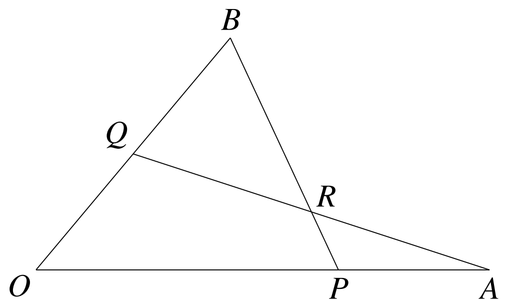
別の解法を紹介します。

$(12t-6)\cos\theta - 13t + 4 = 0$ とならないとき、これを $\cos\theta$ で解きます。$0 < \theta < \pi$ より、$\cos\theta$ の値が -1 より大きくて 1 よりも小さいとき θ が存在します。だから、θ が存在しないとき $\cos\theta \leqq -1$ かつ $1 \leqq \cos\theta$ で解いても求めることができます。

ただ、この場合分数が出てくるのでメンドウです。上記のように解くのが一番ラクだと思います。それでは、解答に進みます。

【問題の解答】

$O(0,0), A(3,0), B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ としてよい。



メネラウスの定理より $\dfrac{OB}{BQ}\cdot\dfrac{QR}{RA}\cdot\dfrac{AP}{PO}=1$ が成立する。

$$
\begin{aligned}
\frac{OB}{BQ}\cdot\frac{QR}{RA}\cdot\frac{AP}{PO}&=1\\
\frac{2}{1}\cdot\frac{QR}{RA}\cdot\frac{3-3t}{3t}&=1\\
\frac{QR}{RA}&=\frac{t}{2(1-t)}
\end{aligned}
$$

よって $QR:RA=t:2(1-t)$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{t}{t+2(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2(1-t)}{t+2(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&=\frac{t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2(1-t)}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}
\end{aligned}
$$

となる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,0), \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\cos\theta,\sin\theta)$ より、

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{t}{2-t}(3,0)+\frac{2(1-t)}{2-t}(\cos\theta,\sin\theta)\\
&=\left(\frac{3t+2(1-t)\cos\theta}{2-t},\frac{2(1-t)\sin\theta}{2-t}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2\cos\theta - 3, 2\sin\theta)$

$\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直にならないとき、$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} \fallingdotseq 0$ である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OR} &= \frac{4t + 2(1-t)\cos\theta}{2-t} \cdot (2\cos\theta - 3) + \frac{2(1-t)\sin\theta}{2-t} \cdot 2\sin\theta \\ &= \frac{(12t-6)\cos\theta - 13t + 4}{2-t}\end{aligned}$$

分子の $(12t-6)\cos\theta - 13t + 4$ が 0 にならなけらば、$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OR} = 0$ となることはない。

分子のみで考える。$\cos\theta = x$ と置換する。$-1 < x < 1$ となる。$(12t-6)\cos\theta - 13t + 4 = (12t-6)x - 13t + 4 = f(x)$ とする。

$f(1) = -t - 2 < 0 \ \ (0 < t < 1)$。

よって、$-1 < x < 1$ で $f(x)$ が 0 とならないとき、$f(-1) \leqq 0$ となる。

$$\begin{aligned}f(-1) &= (12t-6) \cdot (-1) - 13t + 4 \\ &= -25t + 10\end{aligned}$$

$f(-1) \leqq 0$ のとき $-25t + 10 \leqq 0$ つまり $t \geqq \frac{2}{5}$ となる。

$0 < t < 1$ と合わせて、求める t の値の範囲は $\boldsymbol{\frac{2}{5} \leqq t < 1}$ である。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法

https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司