

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

$\alpha = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とする。 α が整数であることを示せ。

【問題の解説】

なんともつかみどころのない問題だよね。でも、とりあえず α を 3 乗してみることにします。

* α を 3 乗する根拠は、3 乗根があるからです。「3 乗根があるから、3 乗してみようかな？」といった程度です。

数学って、こういうこと多いですよ。とりあえず、できそうなことをやってみます。それで、解けたら OK だし、解けなかったら別の解法を考えます。

とにかくできそうなことをやってみるということが重要です。

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \\ \alpha^3 &= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \right)^3 \\ &= 5\sqrt{2}+7 - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)^2} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} + 3\sqrt[3]{5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7)^2} - 5\sqrt{2}+7 \\ &= 14 - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)^2(5\sqrt{2}-7)} + 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)^2}\end{aligned}$$

ここまで、変形できることは理解できると思います。ここから 3 乗根の中身の $(5\sqrt{2}+7)^2(5\sqrt{2}-7)$ と $(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)^2$ を計算していきます。

まず、2 乗を展開して計算してもらってもできないことはありません。ですが、以下の

ように順番を変えた方が簡単に計算できます。

$$\begin{aligned} & (5\sqrt{2} + 7)^2(5\sqrt{2} - 7) \\ &= (5\sqrt{2} + 7) \cdot (5\sqrt{2} + 7) \cdot (5\sqrt{2} - 7) \\ &= (5\sqrt{2} + 7)\{(5\sqrt{2})^2 - 7^2\} \\ &= (5\sqrt{2} + 7) \times 1 \\ &= 5\sqrt{2} + 7 \end{aligned}$$

*こういうふうに計算をした方が簡単に計算できるよね。かけ算のときはかける順番によって計算量が変わってくる場合があります。かけるときは「どの順番で考えたら一番計算がラクになるだろう？」と考えてから計算をするようにしてください。

上記と同じように計算すれば $(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)^2 = 5\sqrt{2} - 7$ となります。

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= 14 - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2} + 7)^2(5\sqrt{2} - 7)} + 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)^2} \\ &= 14 - 3\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} + 3\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} \end{aligned}$$

と上記のように変形できるよね。で、ここからが少し気付きにくいけど、上記の式の $-3\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} + 3\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ の部分は $-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}\right) = -3\alpha$ と変形できます。

*この変形に気づけるかどうか今回の問題のポイントです。 α が整数であることを求めよとなっているので気づきにくいです。ただ、この式が α についての方程式となっていて、その方程式の解が整数だとしたら α が整数だと言えたことになるよね。

「人に言ってもらったら分かるけど、自分一人ではなかなか気づけないよ」なんて思うかもしれませんが、**「こういった問題もある」ということを頭にいれればおけば気づけるようになってきますよ。頑張ってください。それでは、解答に進みます。**

【問題の解答】

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \\ \alpha^3 &= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3 \\ &= 5\sqrt{2}+7 - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)^2} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} + 3\sqrt[3]{5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7)^2} - 5\sqrt{2}+7 \\ &= 14 - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)^2(5\sqrt{2}-7)} + 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)^2} \\ &= 14 - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7) \times (5\sqrt{2}+7)} + 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7) \times (5\sqrt{2}-7)} \\ &= 14 - 3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + 3\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \\ &= 14 - 3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right) \\ &= 14 - 3\alpha\end{aligned}$$

*ここからは3次方程式 $\alpha^3 = 14 - 3\alpha$ を解くだけですよ。

$$\alpha^3 + 3\alpha - 14 = 0$$

$$(\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 7) = 0$$

よって $\alpha - 2 = 0$ または $\alpha^2 + 2\alpha + 7 = 0$

*これでおそらく $\alpha^2 + 2\alpha + 7 = 0$ は不適で、 $\alpha = 2$ となって証明終了だろうなという予想はつきます。

で、今回 $\alpha = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ となっているので、 α は実数なんだよね。 $\alpha^2 + 2\alpha + 7 = 0$ は判別式でわかるけど、虚数解しか持ちません。だから、不適ということが言えます。

ここで、 $\alpha^2 + 2\alpha + 7 = 0$ の判別式を D とする。 $\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot 7 = -6 < 0$ となり、方程式 $\alpha^2 + 2\alpha + 7 = 0$ は実数解をもたない。 α は実数であるので不適。

以上より、 $\alpha = 2$ であるので、 α は整数である。(証明終)

今回の問題は、手掛かりが少なくて難しいと思う人もいたと思います。

解法のポイントとしては、最初に3乗をする、そして $-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)=-3\alpha$ と気づけるか?の2点です。

慣れてきたらできるようになります。問題を見て、「3乗根が含まれているから3乗するのかな?」や「 α の方程式になって欲しいな」と気づけるようになることが重要です。

ただ、心配しなくてもある程度問題を解いていたら気づけるようになってきますよ。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの?」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司