「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a,b,c を正の実数で、$abc=1$ をみたすものとする。このとき、次の（１）、（２）の不等式を示せ。

(1) $a^2+b^2+c^2 \geqq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

(2) $a+b+c \geqq 3$

【問題（１）の解説】

問題に進む前に、まず $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ という不等式を証明しておきます。

(左辺) − (右辺)

$=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2bc-2ca)$ ◀ $2a^2=a^2+a^2, 2b^2=b^2+b^2, 2c^2=c^2+c^2$ と変形をした！

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$ ◀ 順番を入れ替えた！

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$

また、等号が成立するのは $a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$ つまり $a=b=c$ のとき

上記の証明は、よく出てきますよ。しっかりと覚えておいてくださいね。

＊この証明って、知らなかったら普通は思いつけませんよ。僕も、始めてみたとき「こ

んなん無理やわ …」（関西弁です）なんて感想でした。

でも、当たり前だけど覚えたらできるようになります。数学って「このときはこうする！」と暗記したら解けるようになることが多いです。

「暗記数学は大学受験では通用しない」なんて言う人がいます。でも、数学ができる人も覚えるべき事柄はしっかりと暗記していますよ。

できない人に限って、「数学は暗記ではない」なんて言って覚えません。できるようになりたければ、暗記していってくださいね。

では、上記の不等式の証明を踏まえて今回の問題を見てみます。２つの不等式の証明だけど、まず左側の不等式の証明の $a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ を示していきます。

今回は、$abc=1$ という関係式が与えらえています。数学では文字の種類が多いほど大変。文字の種類が多い時は、文字の種類を減らしてから考えるという決まりごとがありました。

今回もその決まり事に則って、例えば $abc=1$ で $c=\frac{1}{ab}$ を代入していけば文字の種類が a,b,c から a,b のみになるので考えやすくなります。

通常なら、こう変形することが多いのですが、今回の場合少し違います。$abc=1$ を使うと右辺の $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ は $ab+bc+ca$ と変形できるよね。これなら、先ほど示して不等式と同じ形になってくれます。

＊これは、$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ が成立するということを知っておかないと、気づくことは少し厳しいです。

数学ってこういうふうに、知っていれば気づけるけど、知らなければ気づけないということは多々あります。考えるためには知識が必要です。こういった知識を増やしていってください。

左側の不等式は先ほどと同じように示せば終了です。次に、右側の不等式です。

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ これも見た瞬間はどうやって示すのか分かりません。まあ、不等式の証明だから (左辺) − (右辺) をするのかな？とか、$abc=1$ より文字の種類を減らすのかな？なんて思いますが、うまくいきそうにありません（解く前からなんとなく感覚的に分かります）。まず、以下のことを覚えておいてください。

受験問題の考え方

受験問題で、（１）、（２）となっているとき、（２）は（１）を使ったり、ヒントにして解いていくことが多い！

今回は（１）、（２）となっている訳ではありません。ですが、大学受験では前問の結果を使って解いていくことが多いです。だから、常に前問の結果を使うことはできないかな？と考えるクセをつけておいてください。

$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{c}}=\dfrac{1}{\sqrt{abc}}$ です。で、$abc=1$ なので $\dfrac{1}{\sqrt{abc}}=1$ です。

だから、左側の不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ で、a を $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$、b を $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$、c を $\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ と置き換えても OK です。

＊なぜ、こういった式変形をしてよいのか分かっていない人がいるので説明しておきます。

左側の不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ を示したけど、これは a,b,c は正の実数で $abc=1$ と３つかけわせて１になるという条件がありました。

a,b,c のところには、正の実数で $abc=1$ という条件さえ満たしていれば、どんな数がきても不等式は成立します。つまり置き換えても OK です。

で、今 $\dfrac{1}{\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{b}},\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ は３つとも正の実数だよね。掛け合わせて１であることも確認しました。

正の実数で３つをかけて１という条件を満たしているので、前半の不等式で置き換えても OK です。

【問題（１）の解答】

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$\Longleftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\cdots① \text{ かつ} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\cdots②$$

① の $a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ を示す。

(左辺) − (右辺)

$=a^2+b^2+c^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$ $\left(\because\ abc=1 \text{ より} \frac{1}{a}=bc, \frac{1}{b}=ca, \frac{1}{c}=ab\right)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2bc-2ca)$ ◀ $2a^2=a^2+a^2, 2b^2=b^2+b^2, 2c^2=c^2+c^2$ と変形をした！

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$ ◀ 順番を入れ替えた！

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$

よって、① は成立する。

＊今回は問題で等号成立条件は問われていません。数学は、聞かれたことしか答える必要はないです。だから、等号成立条件が問われていないときは、基本的に答える必要はありません。

学校では、問われていなくても等号成立条件を必ず書くこともあります。ただ、受験レベルで考えたら、問われているときのみ書いておけば基本的には大丈夫です。

次に、$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\cdots②$ を示す。

$\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{abc}}=1$ より、① の a を $\frac{1}{\sqrt{a}}$、b を $\frac{1}{\sqrt{b}}$、c を $\frac{1}{\sqrt{c}}$ と置き換えて

よい。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \geqq \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{c}}}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

よって、② が成立する。

以上より、$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が成立する。（証明終）

＊後半の置き換えがすこし気づきにくいかもしれません。ですが、「前問の結果を使うんだ」と強く自分に言い聞かせたら気づけます。こういう入試問題多いですよ。解けるようになっておいてください。

【問題（２）の解説】

３つの相加相乗平均を使えば簡単に解ける問題です。

３つの相加相乗平均

$a>0, b>0, c>0$ のとき、$\boldsymbol{\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[n]{abc}}$ が成立する。等号成立条件は $a=b=c$ のとき

相加相乗平均ですが、(相加平均) ≧ (相乗平均) といった性質があります（証明はできますが、とりあえず既知のものして扱ってください）。

で、相加平均はこれまで小学生のときから使ってきた平均です。足してその個数で割るものです。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の相加平均は $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ です。

相乗平均は少し聞き慣れませんが、$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ です。

これより、$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ が成立します。これが相加相乗平均の式です。高校の教科書では２個までのものしか扱っていないことが多いです。でも、受験で

は４個くらいまでは頻出ですよ。

n 個の相加相乗平均は証明問題としてたまにみかけます。ただ、そういったときは誘導形式で出題されることが多いので、証明自体は覚えなくてよいと思います。今回は、n 個の証明は省略します。ですが、３個の相加相乗平均の証明をします。

この３個の相加相乗平均ですが、いくつか有名な証明法があります。ですが、以下のようにするのが一番ラクです。

【３個の相加相乗平均の証明】

$A>0, B>0, C>0$ のとき、$A^3+B^3+C^3-3ABC \geqq 0$ を示す。

$A\,3+B\,3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$
⇑因数分解の公式。忘れていた人は覚えておいてください。

ここで $A>0, B>0, C>0$ より $A+B+C>0$

また、$A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA=\frac{1}{2}\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\} \geqq 0$ ⇐（１）で示した式と同じ

よって、$A^3+B^3+C^3-3ABC \geqq 0$ がいえる。等号が成立するのは $A-B=0$ かつ $B-C=0$ かつ $C-A=0$ つまり $A=B=C$ のとき

ここで $A=\sqrt[3]{a}, B=\sqrt[3]{b}, C=\sqrt[3]{c}$ で置き換える。
⇑A, B, C は正という条件さえみたしていればどんなものがきても OK です。$\sqrt[3]{a}>0, \sqrt[3]{b}>0, \sqrt[3]{c}>0$ なので置き換えても OK です。

$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \geqq 0$ つまり $\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成立する。

等号成立は $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$ つまり $a=b=c$ のとき（証明終）

【問題（２）の解答】

$a>0, b>0, c>0$ がいえている。相加相乗平均より

$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成立する。$abc=1$ であるので $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq$ [3]1 つまり $a+b+c \geqq 3$ が成立する。（証明終）

＊３個以上の相加相乗平均は教科書に載っていません（教科書によっては掲載されていることもある）。基本的に教科書に載っていない式を使うときは、使わない方がベターです。使うとしたら「証明してから使え」と言われています。

ただ、大学受験の場合は採点基準は公表されていません。また、作る側の大学が高校数学の範囲をしっかりと認識していないこともよくあります。

だから、範囲外のものを使うときの解答の書き方は、その場その場で判断していくしかありません。今回の問題の場合、３個の相加相乗平均の式を証明なしで答えにしました。

これでOKだと思います。もし、証明が必用なら設問で「３個の相加相乗平均を示せ」とあるのでは？と判断したからです。ただ、これも絶対とは言えません。難しいかもしれませんが、出題者の空気を読んで解くしかありません。それでは、頑張ってください。

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司