「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1}) \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

を満たしているとき、以下の問いに答えよ。

(1) n に関する数学的帰納法で、$a_n > 0$ であることを証明せよ。

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき、b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。

【問題の解説】

漸化式の問題です。漸化式の問題はパターンが決まっているものもあります。

漸化式のパターンはすべて覚えておかないといけません。漸化式のパターンをすべて網羅したプリントを作っています。

漸化式に自信がない人は以下のプリントをみてください。

漸化式のプリント（問題編）https://www.hmg-gen.com/mondai-zenkasiki.pdf
漸化式のプリント（解答解説編）https://www.hmg-gen.com/zenkasiki.pdf

漸化式のパターンをすべて覚えていれば分かると思います。今回の、問題はどのパターンにもあてはまらない問題です。

そういうときは、①誘導が与えられているまたは②$a_1, a_2, a_3, \cdots$ を計算して、答えを予測しての帰納法。のいずれかで解けるようになっています。

今回の問題も、（２）で $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおけ、が誘導ですよ。それに従っていけば解けてしまいます。

（１）は、（２）で逆数をとらないといけません。そんなとき、分母が０になることはないということで使います。漸化式は、帰納法とセットで出題されることも多いです。

受験では頻出タイプです。解けるようになっておいてください。

【問題（１）の解答】

「$a_n > 0$ である」$\cdots$① ことを、数学的帰納法を使って示す。

(i) $n = 1$ のとき、$a_1 > 0$ より、① は成立する。
(ii) $n = k$ のとき、① が成立すると仮定する。$a_k > 0$ である。

$a_{k+1} - a_k = a_k(5 - a_{k+1})$

⇑ 問題で与えられている式、$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で n を k に置き換えた。今回与えられている式はすべての自然数 n において成立します。n のところは自然数でさえあればどんな数字がきても OK です。

今 k は自然数です。だから、n を k で置き換えても OK です。

$a_{k+1} - a_k = 5a_k - a_k a_{k+1}$

$(a_k + 1)a_{k+1} = 6a_k$

$$a_{k+1} = \frac{6a_k}{a_k + 1} \quad (\because \ a_k > 0 \text{ より、} a_k + 1 \fallingdotseq 0)$$

∗両辺を割るときは０になるかどうか必ず確認しないといけません。今回の場合 $a_k > 0$ より $a_k + 1 > 1 \fallingdotseq 0$ です。このくらいなら書かなくても減点されないかもしれません。ですが、書いておいた方が無難です。

$a_{k+1} = \dfrac{6a_k}{a_k + 1}$ となる。$a_k > 0$ より $a_{k+1} > 0$ となる。

よって、$n=k+1$ のときも ① は成立する。

以上より、すべての自然数 n において $a_n>0$ である。（証明終）

【問題（２）の解答】

＊（２）は（１）より、$a_{n+1}=\dfrac{6a_n}{a_n+1}$ となります。こうなったときは、両辺の逆数をとれば簡単に解ける形になってくれます。

分母に０がくることはできません。両辺の逆数をとるときは両辺ともに０でないということを確認しておかないといけません。今回の場合（１）より、確認出来ています。

（１）より $a_{n+1}=\dfrac{6a_n}{a_n+1}$ となる。また、すべての自然数 n において $a_n>0$ なので、$a_{n+1}=\dfrac{6a_n}{a_n+1}$ の両辺ともに０ではない。

よって、両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{6a_n}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6a_n}$$
$$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}}\cdots②$$

【問題（３）の解答】

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ より $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$ となる。

特性方程式より、$\alpha=\dfrac{1}{6}\alpha+\dfrac{1}{6}$。これを解くと、$\alpha=\dfrac{1}{5}$ となる。

よって、② は $b_{n+1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(b_n-\dfrac{1}{5}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{5}\right\}$ は初項 $b_1-\dfrac{1}{5}=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$、公比 $\dfrac{1}{6}$ の等比数列である。

よって、

$$
\begin{aligned}
b_n - \frac{1}{5} &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\
b_n &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5} \\
&= \frac{4 + 6^{n-1}}{5 \cdot 6^{n-1}} \\
\frac{1}{a_n} &= \frac{4 + 6^{n-1}}{5 \cdot 6^{n-1}} \quad \left(\because \ a_n = \frac{1}{b_n}\right) \\
a_n &= \boldsymbol{\frac{5 \cdot 6^{n-1}}{4 + 6^{n-1}}}
\end{aligned}
$$

この問題は、岡山大学（文系）の過去問です。岡山大学の過去問ではありますが、非常に基本的な問題です。

と言っても、このあたりのレベルの問題がしっかりと解けるかどうかが受験では合否を分けることもあります。まずは、こういったレベルの問題を確実に解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司