「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

以下の問いに答えよ。

(1) $p > 1, q > 1$ のとき、不等式 $p + q < pq + 1$ を証明せよ。

(2) $a > 1, b > 1$ のとき、不等式 $\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ を証明せよ。

(3) $a > 1, b > 1, c > 1$ のとき、不等式 $\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2$ を証明せよ。

【問題（１）の解説】

不等式の証明です。不等式の証明は多くのの場合 (右辺) − (左辺) を計算して、それが０より大きいことを示していくよね。０より大きいことの証明法は、大きく分けて以下の２つの方法があります。

０以上の証明法

０以上や０より大きいの証明法は、以下の２通りがある。

(ｉ) 情報が何も与えられていないとき

$(\quad)^2 + (\quad)^2$ と２乗の和にして、０以上であることを示す。
＊ $(\quad)^2 + (\quad)^2$ と２つの和にしました。でも、$(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2$ と３個のときでも **OK** ですし、何個の場合でも当然０以上となります。ただ、よく出題されるのは２個か３個のときです。

(ii) 範囲や大小関係などの情報が与えられているとき
因数分解を使って、０以上や０より大きいことを示す。

２個目の因数分解を使って示すの意味がわかりにくいと思います。例をとって話してみます。

例えば$a<b<c$が与えられていて、$(a-b)(a-c)$と因数分解できたとします。このとき、$a<b<c$より$a-b<0, a-c<0$です。だから、$(a-b)(a-c)>0$であることがわかります。

ちょっと屁理屈みたいだけど、数学の問題を解くうえにおいて重要だから話しておきます。

数学は必用のない情報が与えられることがない。だから、範囲や大小関係が問題に与えられているとき、この情報を使って問題を解かないといけない。もし、$(\quad)^2+(\quad)^2$と変形できるのなら、この範囲や大小関係といった情報は必要がない。範囲や大小関係を使って解く解法は、因数分解をするくらいしかない。だから、解く前から、「因数分解を使って解く解法」と予想できる。

＊少し理屈っぽかったけど、上記のように考えることは意外に重要です。覚えておいてくださいね。

【問題（１）の解答】

＊今回は$p>1, q>1$と範囲が与えられているよね。大小関係が与えられているとき、問題を解く前から「たぶん因数分解できるんだろうな」と予想をして解いていける。

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= (pq+1)-(p+q)\\
&= pq+1-p-q\\
&= (q-1)p-(q-1)\\
&= (p-1)(q-1) \quad \text{◀ 予想通り因数分解できた！}
\end{aligned}
$$

$p>1, q>1$であるので$p-1>0, q-1>0$である。よって、$(p-1)(q-1)>0$

以上より、$p+q<pq+1$が成立する。（証明終）

＊今回の問題の因数分解は比較的簡単でした。ただ、問題によって気づきにくいものもあります。でも、そんなものでも「因数分解できるはず！」と自分に言い聞かせていた

ら気づけるようになります。

【問題（２）の解説】

この問題は、以下の同値変形を使って解いていきます。

重要な同値変形

$\boldsymbol{A > 0}$ かつ $\boldsymbol{B > 0}$ のとき、$\boldsymbol{A < B \quad \Leftrightarrow \quad A^2 < B^2}$

両辺とも正のとき、$A < B$ と $A^2 < B^2$ であることは同値です。だから、$A^2 < B^2$ を示したら $A < B$ も示したことになるよね。

ルートを含んでいると考えにくいです。だから、両辺を２乗をしてから示すことが多いです。ただ、両辺を２乗しても同値性が崩れないのは両辺とも０より大きいときだからね。それをしっかりと解答に書いておかないと減点されてしまいますよ。

それでは、両辺を２乗してから右辺から左辺を引いてみます。

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2 - (\sqrt{a+b-1})^2 \\
&= a + b + 1 + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} - a - b + 1 \\
&= 2 + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} \\
&= 2(\sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1)
\end{aligned}
$$

とりあえず、右辺から左辺を引いて整理したら上記のようになりました。

「ここからどうしよう？今回も $a > 1, b > 1$ が与えられているから因数分解できるのかな？」と考える人もいると思います。ただ、ここではまず以下のことを思い出してください。

受験問題の考え方

大学受験の問題で（１）、（２）となっているとき、（２）は（１）を使ったり、ヒントにして解いていくことが多い！

＊上記は大学受験の問題を解くうえで本当に重要ですよ。（１）、（２）となっていても前問の結果を使わずに解くことも、もちろんあります。

ただ、（１）、（２）となっている時点で前問の結果を使うのでは？と考えられるようになっておいてください。

それでは、このことを念頭において（２）の $\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1$ を見てみるね。

$\sqrt{a}=p,\ \sqrt{b}=q$ とでも置き換えてみると、$\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1=pq-p-q-1$ となって、これは（１）で示した式（の途中の部分）と同じになるよね。だから、これで示すことができます。

（１）は、$p>1, q>1$ のとき成立する式なんだよね。ということは、p と q の部分には１より大きいことさえ満たしていればどんな文字式が入っても OK です。

今、$a>1, b>1$ となっているので $\sqrt{a}>1,\ \sqrt{b}>1$ となっているので置き換えても OK ですよ。

ただ、今回の場合、答案の書き方としては単に因数分解したように書きます。発想の手掛かりとしては（１）を利用しました。

もちろん、（１）を使って解答を書いてもらってもいいのですが、少し書くのがメンドウです。それでは、解答に進みます。

【問題（２）の解答】

$a>1, b>1$ のとき、$\sqrt{a+b-1}>0,\ \sqrt{a}+\sqrt{b}-1>0$ である。

よって、$\sqrt{a+b-1}<\sqrt{a}+\sqrt{b}-1$ と $(\sqrt{a+b-1})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2$ は同値である。

以下、$(\sqrt{a+b-1})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2$ を示す。

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= (\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2-(\sqrt{a+b-1})^2 \\
&= a+b+1+2\sqrt{ab}-2\sqrt{b}-2\sqrt{a}-a-b+1 \\
&= 2+2\sqrt{ab}-2\sqrt{b}-2\sqrt{a} \\
&= 2(\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1) \\
&= 2\{\sqrt{a}(\sqrt{b}-1)-(\sqrt{b}-1)\} \\
&= 2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)
\end{aligned}
$$

ここで、$a > 1, b > 1$ より $\sqrt{a} > 1, \sqrt{b} > 1$ がいえるので、$2(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1) > 0$ である。

$(\sqrt{a + b - 1})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$ が成立する。

$\sqrt{a + b - 1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ と $(\sqrt{a + b - 1})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$ は同値であるので、$\sqrt{a + b - 1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ も成立する。（証明終）

【問題（３）の解説】

これも、問題を見た瞬間に「両辺の２乗かな？」と考える人もいると思います。でも、今回の場合２乗をする可能性は高くないですよ（もちろんゼロではないけど …）。

数学の問題って、多くの場合公式を使って解いていきます。$(a + b + c)^2$ の展開公式なら勉強をしているけど、$(a + b + c + d)^2$ の展開公式は勉強をしていないよね。

もちろん、単に分配法則で計算するだけで $(a + b + c + d)^2$ の展開くらいならすることができます。

ただ、さっきもいったように、数学は公式を使えないことをすることはマレです。だから、「４項の２乗の展開をする可能性は低いな。だから、別の解法を考えよう」として別の解法を探します。

＊上記のような話をすると、「こんな考え方全然数学的ではない。数学とは、数学的に矛盾がなければ何をしても OK だ。だから、上記のような数学的ではない考え方は受け付けない」という人がいます。

確かにもっともな意見です。上記の場合でも、可能性が低いというだけで４項の２乗の計算をして解いていくかもしれません。

ただ、あくまで経験則として「そうすることが多い」ということです。こういうものは、数学の能力がある人は、本能的に嗅ぎ分けることができます。

ただ、僕も含めて普通の能力の人はそんなの無理ですよ。でも、こういったテクニック的な考え方を手に入れると数学の能力がある人と同じくらいに、数学の問題が解けるようになります。

「こんなの、聞いたことない話し」なんて僕の解説をないがしろにする人がいます。でも、大切にして覚えていってくださいね。そうすれば、自分でもびっくりするくらい成績があがりますよ。頑張ってください。

「２乗する可能性は低いので、他の解法があるはず」です。で、どうしようかな？と考えます。そこで、重要なのは先ほどの知識です。

受験問題の考え方

大学受験の問題で（１）、（２）となっているとき、（２）は（１）を使ったり、ヒントにして解いていくことが多い！

今回の場合（１）や（２）の結果を使って解くことができないかな？と考えます。

（３）は $\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2$ で、（２）の $\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a}+\sqrt{b}-1$ となんとなく似ているよね。

こんなふうに、前問と似ているとき、前問の結果を利用して解くことが多いですよ。（１）、（２）となっているだけで、「前問を使うのかな？」と注意しないといけません。

さらに、今回のように問題が似ているときは、ほぼ間違いなく前問の結果を使うと思ってもらって大丈夫ですよ。

で、どうやって（２）を使おうかな？と考えるけど、以下のように強引に変形するだけです。

＊以下はちょっと気づきにくい変形かもしれません。ただ、（２）の結果を使う可能性が高い！と自分に言い聞かせたら気づけるようになりますよ。

$$\sqrt{a+b+c-2} = \sqrt{a+(b+c-1)-1}$$

上記のように強引に変形します。そうすると（２）を使えます。今回の場合 $b>1, c>1$ なんだよね。だから、$b+c>2$ となり、これより $b+c-1>1$ です。

$a, b+c-1$ ともに１より大きいので、（２）で示した。$\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a}+\sqrt{b}-1$ で a はそのままで、b を $b+c-1$ と置き換えても OK です。

これより、 $\sqrt{a+b+c-2} = \sqrt{a+(b+c-1)-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1$ が成立します。

ここで、もう一度（２）を使います。 $\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ で a を b、b を c に置き換えると $\sqrt{b+c-1} < \sqrt{b} + \sqrt{c} - 1$ となります。

これで、 $\sqrt{a+b+c-2} = \sqrt{a+(b+c-1)-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 1 - 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2$ となり、証明終了です。

人によっては､「かなり強引な式変形をするな」と思う人もいるかもしれません。ですが、受験ではこういうふうに強引に式変形をして解いていくというのはよく出てきますよ。

受験問題の解法に慣れておいてください。

【問題（３）の解答】

$b > 1, c > 1$ より $b+c-1 > 1$ が言える。

（２）で示した不等式 $\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ で、b を $b+c-1$ で置き換える。

$\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1 \cdots ①$

また、２）で示した不等式 $\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ で、a を b に、b を c にで置き換える。

$\sqrt{b+c-1} < \sqrt{b} + \sqrt{c} - 1 \cdot ②$

①, ② より $\sqrt{a+b+c-2} = \sqrt{a+(b+c-1)-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 1 - 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2$

よって、 $\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2$ が成立する。（証明終）

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司