

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

実数 a, b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta$$

とし、 $0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos \theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。

また、条件をみたす点 (a, b) が描く図形を座標平面上に図示せよ。

【問題 (1) の解答】

* 2 倍角の公式と 3 倍角の公式をあてはめるだけで解けてしまいますよ。

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta$$

$$= (-3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta) + a(2 \cos^2 \theta - 1) + b \cos \theta \quad \blacktriangleleft \text{2 倍角の公式と 3 倍角の公式を使った!}$$

$$= 4 \cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta + (b - 3) \cos \theta - a$$

$$= 4x^3 + 2ax^2 + (b - 3)x - a$$

* $g(\theta)$ の方も単に計算をするだけです。整式と言っています。だから、うまいぐあいに分母と分子が約分される形になるはずですよ (そうしないと整式とは言えない!)

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1} \\
&= \frac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a - (1+a+b)}{x-1} \\
&= \frac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1}{x-1}
\end{aligned}$$

*分子の $4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1$ は $x-1$ を因数にもつ、つまり $x-1$ で割り切れます。3次式を1次式で割るので組み立て除法を利用します。

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 4 & 2a & b-3 & -2a-b-1 \\
& & 4 & 2a+4 & 2a+b+1 \\
\hline
& 4 & 2a+4 & 2a+b+1 & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{(x-1)\{4x^2 + (2a+4)x + 2a+b+1\}}{x-1} \\
&= 4x^2 + (2a+4)x + 2a+b+1
\end{aligned}$$

今回の問題は、何も考えずに解いたけど比較的簡単だったよね。先ほどは、「 $g(\theta)$ は整式だから、 $(x-1)$ を因数にもつはず」なんて言いました。ですが、以下の事実を知っておけば、 $(x-1)$ を因数にもつことを、もう少し論理的に判断することができます。

因数について

整式 $F(x) = f(x) - f(a)$ は、 $x-a$ を因数にもつ。

上記ですが、難しく考えている人もいますが、簡単ですよ。単なる因数定理です。

因数定理とは、「整式 $f(x)$ で、 $f(a) = 0$ のとき、 $f(x)$ が $(x-a)$ を因数にもつ」だったんだよね。

で、上記ですが $F(x) = f(x) - f(a)$ なので $F(a) = f(a) - f(a) = 0$ です。因数定理より $F(x)$ は $(x-a)$ を因数にもちます。大げさに書いたけど、単なる因数定理の延長です。だから、因数定理さえ分かっていたら、暗記する必要はなくその場で考えたら分かる事柄ですよ。

今回の $g(\theta)$ の分子です。 $f(\theta) - f(0)$ となっています。 $f(\theta) = g(x)$ とでもおいたとすると、 $f(\theta) - f(0) = g(x) - g(1)$ となってくれるので $g(x) - g(1)$ は $(x - 1)$ を因数にもちますよ。
 ↑ 今回は置換などがあるので少しややこしいです。上記の説明は分かりにくければ、とりあえず無視してください。ただ、赤枠の部分は重要なのでしっかりと理解しておいてくださいね。

【問題（2）の解説】

(1) で求めた $g(\theta) = 4x^2 + (2a + 4)x + 2a + 4$ を $h(x)$ とでもおくことにします。

置き換えを利用した最大値・最小値問題はさんざんやっているから大丈夫だと思います。
 $\cos \theta$ は $0 < \theta < \pi$ のとき $-1 < x < 1$ なんだよね。

だから、 $g(\theta)$ の $0 < \theta < \pi$ における最小値と $-1 < x < 1$ における $h(x)$ の最小値は一致します。

今から $-1 < x < 1$ における $h(x)$ の最小値を考えていきます。今回は $-1 < x < 1$ と不等式に等号が含まれていないところがポイントです。

今回の場合、 $-1 < x < 1$ に等号はありません。だから、下図のようなとき最小値は存在しません。



今回の場合、最小値をもつのは以下のように定義域の中に頂点が含まれているときだけです。



以上のことを踏まえて、解答に進みます。

【問題（２）の解説】

$h(x) = 3x^2 + (2a + 4)x + 2a + b + 1$ とする。

$g(\theta)$ の $0 < \theta < \pi$ における最小値と、 $h(x)$ の $-1 < x < 1$ における最小値は一致する。

よって、 $h(x)$ の $-1 < x < 1$ における最小値が 0 になる条件を考える。

$$h(x) = 4x^2 + (2a + 4)x + 2a + b + 1$$

* 2次関数の最小値を求める問題なので、平方完成をします。

$$\begin{aligned} &= 4\left(x^2 + \frac{a+2}{2}x\right) + 2a + b + 1 \\ &= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{a+2}{4}\right)^2 + 2a + b + 1 \\ &= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2 + 4a + 4}{4} + 2a + b + 1 \\ &= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + b \end{aligned}$$

$h(x)$ の $-1 < x < 1$ における最小値が 0 である条件は、 $-1 < -\frac{a+2}{4} < 1$ かつ $-\frac{a^2}{4} + a + b = 0$ である。

↑ 定義域の中に頂点があり、かつ、頂点の y 座標が 0 のとき $-1 < x < 1$ における $h(x)$ の最小値が 0 になります。

$$-1 < -\frac{a+2}{4} < 1 \text{ より } -6 < a < 2 \text{ となる。}$$

$$-\frac{a^2}{4} + a + b = 0$$

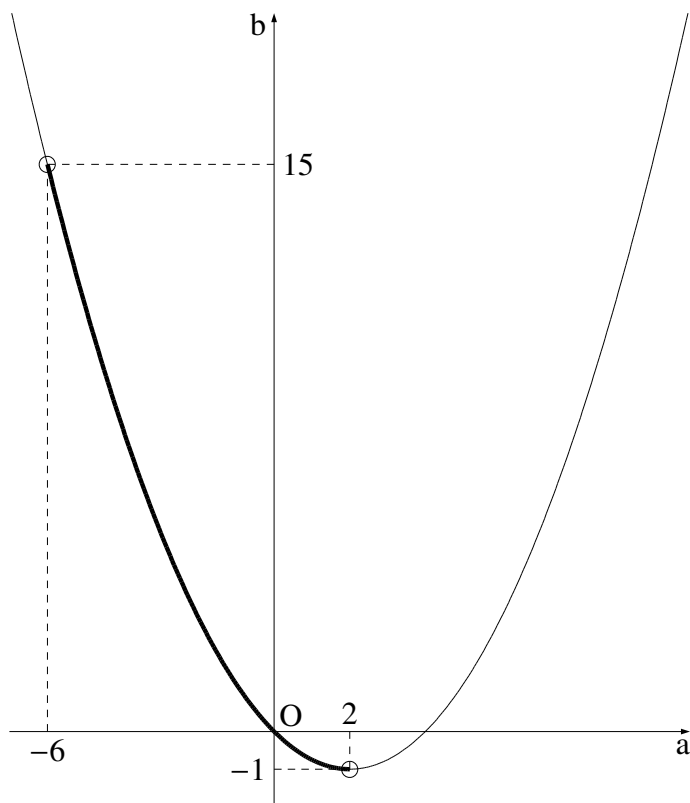
$$b = \frac{a^2}{4} - a$$

$$= \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1$$

以上より、求める a, b の条件は $-6 < a < 2$ かつ $b = \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1$ である。

↑ $b = \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1$ は $b = \frac{a^2}{4} - a$ でも、いいですよ。

これを図示すると下記のようなになる。



今回の問題はどうかだったでしょうか？少し考えることもあったかもしれなかったけど、基本的だったよね。

実は、これ2017年の東京大学の理系で出題された問題です。東大といってもこういう基本的な問題も出題されます。

難関大学を目指す人は、難しい問題を解こうとする人が多いです。それはそれでよいのですが、基本的な事柄が身につけていない段階で難しい問題を解こうとしても無理です。

まずは、こういった基本的な問題をしっかりと解けるようになることを心がけてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司