「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

---

問題

$x$ がすべての実数を動くとき、関数

$$f(x) = 2\left|\sin^3 x - \cos^3 x\right| + \sin x \cos x + \sin x - \cos x$$

の最大値と最小値を求めよ。ただし、最大値や最小値をとるときの $x$ の値を求める必要はない

## 【問題の解説】

三角関数の最大値・最小値問題です。よく出てくる問題なので、しっかりと理解しておいてくださいね。

それでは、問題に進みます。この問題なんけど、問題を見た瞬間に「$\sin x - \cos x = t$ と置換する」と気づけないとダメです。

三角関数の置換の仕方について

与式が $\sin x - \cos x, \sin x \cos x$ のみのとき、$\sin x - \cos x = t$ と置換する。

三角関数の最大値・最小値問題はいくつかの定石と呼ばれるものがあります。それらは、覚えておかないといけません

なお、これらのことを含めて三角関数については以下のプリントで詳しく解説しています。三角関数の理解があいまいな、人は以下のプリントで勉強をしておいてください。

以下のページに載っている三角関数のプリントで勉強をしておいてください。
https://www.hmg-gen.com/

それでは、今回の問題に戻ります。今回の問題は、絶対値を含んではいるけど、与式は$\sin x-\cos x$, $\sin x\cos x$ のみの式で表されているよね。
＊ $\sin^3 x-\cos^3 x=(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)$ と変形すれば、$\sin x-\cos x$ と $\sin x\cos x$ のみで表されます。

$\sin x-\cos x=t$ と置換します。で、置換したときには置き換えた文字の値の範囲について考えないとダメだったんだよね。

$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ と変形できます。$-1\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ より、$t$ の値の範囲は $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ です。

絶対値を含んでいるので少し大変です。ただ、絶対値を含んだ関数は絶対値の中身が０以上が０未満かで場合分けをして解いていくのが、基本的な解き方だったよね。

今回の場合も同じです。０以上か０未満かで場合分けをして解いていきます。少しメンドウですが、道なりに解いていくだけです。それでは、解答に進みます。

【問題の解説】

$\sin x-\cos x=t$ とする。

$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ となる。$-1\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ より、$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ となる。
⇑ 置換したときは、範囲を考える！

＊ $\sin x-\cos x=t$ の両辺を２乗すれば、$\sin x\cos x$ を $t$ のみで表せます。まずは、この変形をしておきます。

$$\sin x - \cos x = t$$
$$(\sin x - \cos x) = t^2$$
$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$$
$$1 - 2\sin x \cos x = t^2 \quad (\because \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$
$$\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2|\sin^3 x - \cos^3 x| + \sin x \cos x + \sin x - \cos x \\
&= 2|(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2)| + \sin x \cos x + \sin x - \cos x \\
&= 2|(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)| + \sin x \cos x + \sin x - \cos x \quad (\because \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= 2\left|t\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right)\right| + \frac{1-t^2}{2} + t \quad \left(\because \quad \sin x - \cos x = t, \ \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}\right) \\
&= 2\left|t \cdot \frac{3-t^2}{2}\right| + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 + t \\
&= |t(t^2-3)| - \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

＊上記の式変形で $|t(3-t^2)| = |t(t^2-3)|$ と変形しました。$|-A| = |A|$ が成立します。だから、絶対値の中身の符号を変えても OK です。別に $|t(3-t^2)|$ のままでもいいですが、絶対値の中身の $t^3$ の係数が正の方がよいと思い、このように変形しした。

＊ここからは、絶対値の中身が 0 以上が 0 未満かによって場合分けをして解いていきます。$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ も合わせて考えていくと、$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 0$ のとき $t(t^2-3) \geqq 0$ で、$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ のとき $t(t^2-3) \leqq 0$ となります。

（i）$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
f(x) &= |t(t^2-3)| - \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} \\
&= t(t^2-3) - \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} \quad (\because \quad t(t^2-3) \geqq 0) \\
&= t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{1}{2} = h(t) \text{ とする。}
\end{aligned}$$

＊ $f(x)$ は $x$ の関数ですが、$\sin x - \cos x = t$ と表すことによって $f(x)$ を $t$ の関数としました。このまま $f(x)$ を微分して $f'(x) = 3t^2 - t - 2$ と書きたくなりますが、(表記の仕方として) これはまずいです。

$f'(x)$ は $f(x)$ を $x$ で微分したものです。でも、さっきのものは $f(x)$ を $t$ で微分したものだよね。だから、$f(x) = h(t)$ とでもして解いていくことにします。

$$h'(t) = 3t^2 - t - 2$$
$$= (t-1)(3t+2)$$
$$h(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - \frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{2})^2 - 2\cdot(-\sqrt{2}) + \frac{1}{2}$$
$$= -2\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}$$
$$h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{8}{27} - \frac{2}{9} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{-16 - 12 + 72 + 27}{54}$$
$$= \frac{71}{54}$$
$$h(0) = \frac{1}{2}$$

| $h$ | $-\sqrt{2}$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(t)$ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{71}{54}$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ |

よって、$-\sqrt{2} \leqq x \leqq 0$ における $f(x)$ の最大値は $\frac{71}{54}$、最小値は $-\frac{1}{2}$ である。

⇑ 上記の増減表で $h(t)$ の最大値・最小値が求まります。$h(t) = f(x)$ より、上記は $f(x)$ の最大値・最小値でもありますよ。

（ii）$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ のとき

$$f(x) = |t(t^2-3)| - \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$$
$$= -t(t^2-3) - \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} \quad (\because \ \ t(t^2-3) \leqq 0)$$
$$= -t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t + \frac{1}{2} = i(t)$$ とする。

$$i'(t) = -3t^2 - t + 4$$
$$= -(t-1)(3t+4)$$

$$i(0) = \frac{1}{2}$$

$$i(1) = -1 - \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} = 3$$

$$i(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^3 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}^2 + 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$
$$= -2\sqrt{2} - 1 + 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $i'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $i(t)$ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $3$ | ↘ | $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ |

よって、$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ における $f(x)$ の最大値は 3、最小値は $\frac{1}{2}$ である。

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 0$ のときの $f(x)$ の最大値と $0 \leqq t \sqrt{2}$ のときの最大値の大きい方が求める最大値である。

$3 > \frac{71}{54}$ より、求める最大値は 3 である。

また、$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 0$ のときの $f(x)$ の最小値と $0 \leqq t \sqrt{2}$ のときの最小値の小さい方が求め

る最大値である。

$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ より、求める最小値は $-\frac{1}{2}$ である。

以上より、最大値 **3**、最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

---

今回は、$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 0$ と $0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ と場合分けをして、それぞれの最大値・最小値を求めて解いていきました。

これをせずに、ふたつを以下のように一つの増減表で表して解いていってもらってもかまいません。

| $h$ | $-\sqrt{2}$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(t)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{71}{54}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ |

上記のように書いて一気に解いていってもらってもかまいませんよ。

ただ、$x = 0$ では微分不可能です。そのことを正しく言及するには数学 III の知識が必要になってきます（絶対値の変わり目は、微分不可能ということが多いですよ）。

その部分で減点される可能性があるので、分けておきました。ただ、よっぽど採点が厳しくないと減点されることは少ないのでそこまで気にする必要はないかもしれません。

また、上記で最大値を求めるとき、「最大値の大きい方が求める最大値」と言いました。これも厳密に言えば少し違います。

$f(x)$ と $g(x)$ の大きい方が最大というのでは、$f(x)$ と $g(x)$ の最大値が一致するときは矛盾があります。そこで、「$f(x)$ の最大値と $g(x)$ の最大値で小さくない方が最大となる」が正しい記述です。

ただ、今回の場合、２つの最大値が違って大きい方が存在するので上記の解答のような書き方で大丈夫です。

少し細かい部分を話しました。こういったことも、のちのち重要になることもあります。ただ、それ以上にまずは解けることが重要です。

今回の問題で、最初から解き方がまったくわからなかったという人は勉強不足です。最初に紹介したページに載っている三角関数のプリントを勉強しておいてください

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録

しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

## ルールを覚えれば誰でもできる！
## あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

---

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司