「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

以下の問いに答えよ。

(1) $a > 0, b > 0, c > 0$ のとき、不等式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqq 0$ を示せ。また、等号成立条件をのべよ。

(2) $x > 0, y > 0, z > 0$ のとき、$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ を示せ。また、等号成立条件をのべよ。

(3) 関数 $x^2 + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ の最小値を求めよ。

【問題（１）の解説】

不等式の証明です。まず、左辺を見てもらって、「ああ、これは因数分解ができるな」と思ってもらわないといけません。

因数分解の公式

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}$$

上記を知らない人もいると思います。ですが、重要な公式ですよ。受験でもたまに出てきます。知らなかったら、０点です。ちゃんと覚えておいてくださいね。

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ と因数分解できました。今回、$a > 0, b > 0, c > 0$ なので $a + b + c > 0$ です。だから、$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ が０以上だったら $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqq 0$ を示したことになるよね。

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqq 0$ の証明は、しょっちゅう出てくるのでできないとダメです

よ。

これは、https://www.hmg-gen.com/merumaga2b-27.pdf でも話しています。もし、分からなければ、このプリントを見ておいてください。

【問題（１）の解答】

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$a > 0, b > 0, c > 0$ であるので $a + b + c > 0$ である。

$$
\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\
=& \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\
=& \frac{1}{2}\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a)^2\} \\
=& \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

以上より、$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqq 0$ である。

また、等号が成立するのは $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ のとき、つまり $a - b = 0$ かつ $b - c = 0$ かつ $c - a = 0$ より $a = b = c$ のときである。（証明終）

【問題（２）の解説】

３個の相加相乗平均を証明せよ、という問題です。相加相乗平均は高校の教科書では２個のものしかのっていないものもあります。

でも、３個や４個のものも実際の大学受験では頻出ですよ。しっかりと理解しておいてくださいね。

その前に、相加相乗平均について、知らない人が多いので簡単に解説をしておきます。

相加平均と相乗平均について話します。まずは、相加平均です。小学校のときの算数で

平均値を求めることがあったよね。これが相加平均です。

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の相加平均は $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ です。

一方、相乗平均とは a_1, a_2, a_3 と３個の場合 $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$、４個の場合は $\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$ です。

n 個の相乗平均は $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ です。

で、相加平均と相乗平均には必ず (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) の関係が成立します。これが、相加相乗平均と呼ばれるものです。

相加相乗平均

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ ただし $a_i > 0 \ (1 \leqq i \leqq n)$
⇑ 相加相乗平均はすべてが０より大きいときに使えます。

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

等号成立は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき

今回は、３個の相加相乗平均の証明です。証明の仕方は大きく分けて２つあります。４個の相加相乗平均を利用して示す方法と、今から示す方法です。

今回は、（１）の問題が誘導になっています。ですから、以下のように示します。ちなみに、相加相乗平均の証明については、以下のプリントでも解説をしています。

興味のある人は見てください。
https://www.hmg-gen.com/tecni2b-6.pdf

【問題（２）の解答】

（１）で示した不等式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqq 0$ で、a を $\sqrt[3]{x}$、b を $\sqrt[3]{y}$、c を $\sqrt[3]{z}$ でおきかえる。
⇑（１）で示した不等式は $a > 0, b > 0, c > 0$ という条件がありました。で、a, b, c のと

ころにはこの３つも正という条件さえ満たしていれば、どんなものがきても成立します。
だから、上記のように a を $\sqrt[3]{x}$、b を $\sqrt[3]{y}$、c を $\sqrt[3]{z}$ おきかえても大丈夫です。

$$(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3+(\sqrt[3]{z})^3-3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}\geqq 0$$
$$x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\geqq 0$$
$$\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$$

等号成立は $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$ つまり $x=y=z$ のときである。（証明終）

【問題（３）の解説】

例えば、$x+\dfrac{1}{x}$ の $x>0$ における最小値を求めよ、というとき、相加相乗平均を使って

$x+\dfrac{1}{x}\geqq\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$、等号成立条件は $x=\dfrac{1}{x}$ つまり $x=1$ となって、$x=1$ のとき、最小値２と解いていきます。

このように、分母に変数が含まれているときの最大値・最小値問題はは相加相乗平均を使って解いていくことが多いです。

分母に変数が含まれているときは、まず最初に「相加相乗平均は使えないかな？」と考えるクセをつけておいてください。

今回の問題ですが、$x^2+\dfrac{1}{x}$ を相加相乗平均を使うと、$x^2+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{x}$ です。

式変形自体は間違ったことはしていません。でも、これでは最小値を求めることはできません。最小値を求めるとためには、相加相乗平均を使って、右辺の変数が消えてくれるように変形します。

今回の場合、以下のように強引に変形をすれば右辺の変数が消えてくれる形になってくれます。また、（２）が３個の相加相乗平均を使いなさいという誘導になっているとも考えることができます。

【問題（３）の解答】

$$x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$$

⇑ ３個の相加相乗平均で、右辺の x が消えてくれるような式変形をしました。$\frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$ が成立しているので、当然こう変形しても OK だよね。

かなり、強引だと思うかもしれませんが、こう変形したら解くことができます。

$x > 0$ のとき $x^2 > 0, \frac{1}{x} > 0$ である。（２）で示した相加相乗平均より

$x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geqq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ がいえる。

等号成立は $x^2 = \frac{1}{2x}$ つまり $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき。

以上より、$x = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt[3]{4}}}$ をとる。

今回の問題は、少し強引に解く問題でした。こういう問題が出題される可能性は高くありません。

ただ、相加相乗平均を使って解く最大値・最小値問題は超がつくくらい頻出ですよ。とにかく、「分母に変数がきたら、相加相乗平均かな？」と思えるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司