「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ から異なる２つを選ぶすべての組み合わせについて、２数の差の２乗をたし合わせたものを S_n とする。例えば、

$$S_3 = (1-2)^2 + (1-3)^2 + (2-3)^2 = 6$$

である。次の問いに答えよ。

(1) S_5 を求めよ。

(2) $(x-1)^4 - x^4 = -4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ を利用して $\sum_{k=1}^{n} k^3$ を n で表せ。ただし、$\sum_{k=1}^{n} c = cn$ （c は定数), $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ は既知である。

(3) S_n を求めよ。

【問題（１）の解答】

＊単に計算をするだけの問題ですよ。${}_5C_2 = 10$ 個あるので、１０個の足し算です。

こういうふうに出題された場合、次以降の問題のヒントとなっていることが多いですよ。（３）で S_n を求めます。これは、$n = 5$ のときです。このときの求め方が S_n を求めるときのヒントになってくれています。

$S_5 = (1-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (3-5)^2 + (3-4)^2 + (4-5)^2$

⇑ 個数が１０個あることをちゃんと確認してね。計算ミスを減らせます。

$= 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

$= 16 + 9 + 4 + 1 + 9 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1$

$= \mathbf{50}$

【問題（２）の解答】

＊シグマの公式を求める問題です。例えば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ と部分分数分解して、互いに打ち消し合う形にして解いたよね。

シグマの問題は、こういうふうに互いに打ち消し合う形にもっていく、ということが基本です。今回は、公式の証明です。その場合も互いに打ち消し合う形にもっていって証明するしかありません。

この問題では「$(x-1)^4-x^4=-4x^3+6x^2-4x+1$ を利用して」と誘導がついています。誘導がついていない場合も解けるようになっておいてくださいね。

自然数 k に対して $(k-1)^4-k^4=-4k^3+6k^2-4k+1$ が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^4-k^4\}=\sum_{k=1}^{n}(-4k^3+6k^2-4k+1)$$

$$(0^4-1^4)+(1^4-2^4)+\cdots+\{(n-1)^4-n^4\}=-4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$-n^4=-4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n+n^4\\&=n\{(n+1)(2n+1)-2(n+1)+1+n^3\}\\&=n(2n^2+3n+1-2n-2+1+n^3)\\&=n(n^3+2n^2+n)\\&=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

【問題（３）の解説】

S_n を求めるなんて難しいな、と思います。

今回は（１）がヒントになっていますよ。こういうふうにヒントとして設問を与えられていることも多いです。

ですが、与えられていない問題も多くあります。そんなときは、n で考えるのではなく、

具体的な簡単な数字 $n = 5$ などで実験してみたら解き方が思いつくこともありますよ。

それでは、今回のものを考えていきます。S_5 で、考えていくことにします。

$S_5 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$ でした。順番を入れ替えると、
$S_5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2$ と変形できます。これだと、1^2 を 4 回、2^2 を 3 回、3^2 を 2 回、4^2 を 1 回足しています。

S_n の場合、1^2 は $n-1$ 回、2^2 は $n-2$ 回、3^2 は $n-2$ 回、$\cdots$、$(n-1)^2$ は 1 回足しています。
⇑ 少し考えたら分かりますよ。1^2 は、$1, 2, 3, \cdots, n$ で差が 1 となる組み合わせの個数です。$(1, 2), (2, 3), \cdots, (n-1, n)$ と $n-1$ 通りあります。

2^2 は $(1, 3), (2, 4), \cdots, (n-2, n)$ の $n-2$ 通りです。他も同様に考えていきます。

$1^2 \cdots n-1$ 回
$2^2 \cdots n-2$ 回
$3^2 \cdots n-3$ 回

上記の流れで分かると思います。k^2 は $n-k$ 回です。

だから、今回の $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k)$ で求めることができます。

【問題（３）の解答】

S_n の各項の中に k^2 $(1 \leqq k \leqq n)$ は $n-k$ 個ある。よって、$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k)$ で表される。

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k) \\
&= n\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= n \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{12}n^2(n+1)\{2(2n+1) - 3(n+1)\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{12}n^2(n+1)(n-1)}
\end{aligned}
$$

＊問題で与えられている $S_3 = 6$ や（１）で求めた $S_5 = 30$ と計算結果があっているということで、検算できます。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司