

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

不等式 $\sin x + \sin y \leq \cos \frac{x-y}{2}$ が成り立つ点 (x, y) の範囲を図示せよ。
ただし、 $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ とする。

【問題の解説】

まあ、よく分かんないけど最初の式変形は和積の公式を使って左辺を変形することにするね。

和積の公式を使う根拠として、三角関数では中身の角度をそろえてから解いていくことが多いということです。

どういうことかと言うと今回の問題なら、 $\sin x, \sin y, \cos \frac{x-y}{2}$ と三角関数の中身の角度は $x, y, \frac{x-y}{2}$ とバラバラだよな。

和積の公式を使えば、同じものが少しは出てくるので解けるようになるかな？と考えました。もちろん、必ずこう変形するとは限りません。とりあえず、可能性が高そうなのでやってみるというだけです。

これで、解けなければまた別の解法で試していきます。

その前に和積の公式を知らないという人がいます。でも、これは簡単ですよ。 $\alpha + \beta$ と $\alpha - \beta$ の加法定理を上下並べて書いて足したり、引いたりしたら求めることができますよ。

それでは、和積の公式 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ を導いてみます。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$+) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

ここで、 $\alpha + \beta = A \cdots \textcircled{1}$, $\alpha - \beta = B \cdots \textcircled{2}$ とします。

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より $2\alpha = A + B$ よって $\alpha = \frac{A+B}{2}$ 。 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $2\beta = A - B$ よって $\beta = \frac{A-B}{2}$ となります。

これらを先ほど求めた $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ に代入すると、

和積の公式 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ が導けました。

*和積の公式、積和の公式は出題頻度はそれほど高くありません。加法定理を足したり引いたりするだけで導くことができるのでわざわざ覚える必要はないですよ。もうすでに、暗記している人はそれでも OK です。でも、暗記していない人はその場で導くようにしたらよいと思います。

それでは、和積の公式を今回の問題に適用して解いていってみます。

$$\sin x + \sin y \leq \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq \cos \frac{x-y}{2}$$

とりあえず、和積の公式を使ってみました。で、ここから両辺を $\cos \frac{x-y}{2}$ で割ろうと考える人がいるけど、気を付けてくださいね。

不等式の両辺を割るときは、それが正、0、負かということを確認しないといけないですよ。

今回の場合、 $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ より $-\pi < x-y < \pi$ です。すべての辺を2で割ると $-\frac{\pi}{2} < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{2}$ が成立します。

よって、 $\cos \frac{x-y}{2} > 0$ となるので、不等式の両辺を $\cos \frac{x-y}{2}$ で割っても不等号の向きは変わりません。

↑ 上記は当たり前と思う人も多いと思います。でも、不等式の両辺を文字式を割るときはその文字式の符号を考える、ということを徹底的に頭に叩き込んでおいてください。そうしないと、試験本番では忘れてしまいますよ。それでは、解答に進みます。

【問題の解答】

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &\leq \cos \frac{x-y}{2} \\ 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &\leq \frac{x-y}{2} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ より $-\frac{\pi}{2} < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{2}$ となるので、 $\cos \frac{x-y}{2} > 0$ である。

① の両辺を $\cos \frac{x-y}{2}$ で割る。

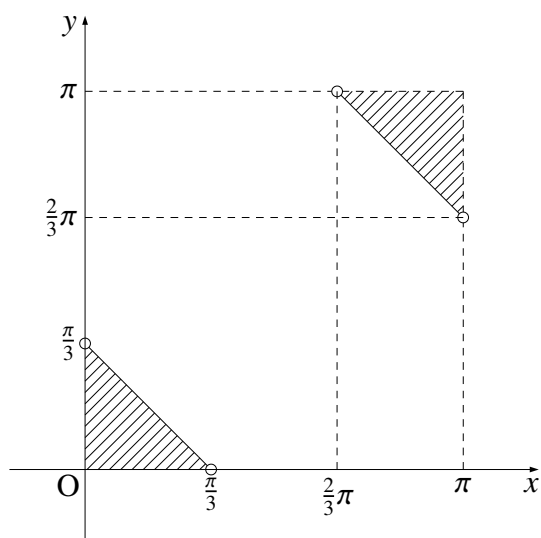
$$2 \sin \frac{x+y}{2} \leq 1 \text{ つまり } \sin \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

$0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ より $0 < \frac{x+y}{2} < \pi$ であることを考えて、 $\sin \frac{x+y}{2} \leq 1$ を解くと

$$0 < \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \leq \frac{x+y}{2} < \pi \text{ となる。}$$

$0 < \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{6}$ を y について解くと $-x < y \leq -x + \frac{\pi}{3}$ となり、 $\frac{5}{6}\pi \leq \frac{x+y}{2} < \pi$ を y について解くと $-x + \frac{5}{3}\pi \leq y < -x + 2\pi$ となる。

$0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ と合わせて図示すると、以下のようなになる。



2 直線 $y = -x + \frac{\pi}{3}$, $y = -x + \frac{5}{3}\pi$ (4 点 $(\frac{2}{3}\pi, \pi)$, $(\pi, \frac{2}{3}\pi)$, $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{3}, 0)$ は除く) との境界線は含み、それ以外の境界線は含まない。

* 今回の問題は、シンプルに見えて少しややこしかったよね。こういった問題は受験では頻出ですよ。丁寧にひとつずつ考えていけば大丈夫です。こういった問題を解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4 浪しているのにセンター 6 割」

→ 「わずか入会 8 か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司