「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

空間内の２点 $P(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $Q(\cos 2\theta, \sin 2\theta, \sqrt{1-\sin\theta})$ と原点 O のつくる三角形 OPQ の面積の最大値および最小値を求めよ。ただし、$0° \leqq \theta \leqq 360°$ とする。

【問題の解説】

三角形の面積を求める問題です。

三角形の面積を求める問題で平面図形だったら他の解法があるかもしれません。ですが、空間座標における三角形の面積とくればほとんどの場合、以下のベクトルの公式を使って求めます。

三角形の面積の公式（ベクトル）

三角形 OAB の面積を S とする。

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

が成立する。

上記の公式は、簡単に導くことができますよ。証明せよという問題もたまに出題されます。覚えておいてくださいね。

ちなみに、証明は以下のプリントで解説しています。
https://www.hmg-gen.com/kaitou2-7.pdf

それでは、解答に進みます。

【問題の解答】

＊ $S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$ の公式を使って求めます。

まず、最初に $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2, \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2, (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2$ を求めてから解いていくことにします。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\sin\theta,0),\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\cos 2\theta,\sin 2\theta,\ \sqrt{1-\sin\theta})$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2&=(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2+0^2\\&=\sin^2\theta+\cos^2\theta\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2&=(\cos 2\theta)^2+(\sin 2\theta)^2+(\sqrt{1-\sin\theta})^2\\&=\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta+1-\sin\theta\\&=2-\sin\theta\ \ (\because\ \ \sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta+0\cdot\sqrt{1-\sin\theta}$

$\Uparrow$ $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ の内積の公式より！

$$\begin{aligned}&=\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta\\&=\cos(2\theta-\theta)\\&=\cos\theta\end{aligned}$$

＊上記の $\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta=\cos(2\theta-\theta)$ が気づきにくいかもしれません。ですが、いわれたら気づくよね。加法定理を使っただけですよ。

加法定理を使って展開をするのはみんなできると思います。でも、その逆で、加法定理を使って上記のように整理するということもたまに出てきます。気づけるようになっておいてくださいね。

心配しなくても、「こういったことをすることがある」ということを頭に入れておけばすぐに気づけるようになりますよ。

なお、上記ですが $\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta=\cos(\theta-2\theta)=\cos(-\theta)$ として、$\cos(-\theta)=\cos\theta$ としてもらってもいいですよ。ただ、メンドウなので $\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta=\cos 2\theta\cos\theta+$

$\sin 2\theta \sin\theta$ と頭の中で変形をしてから加法定理を使いました。

$\triangle$OPQ の面積を S とする。

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot(2-\sin\theta)-(\cos\theta)^2} \quad \left(\because \ \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = 1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 = 2-\sin\theta,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sin\theta-\cos^2\theta}$$

＊ここからは、与式を $\sin\theta$ のみで表せそうなので、そのように変形します。

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sin\theta-(1-\sin^2\theta)}$$ ◀ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ より！与式を $\sin\theta$ のみの式にした！

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\theta-\sin\theta+1}$$

＊今回は S の最大値と最小値を求めよ、という問題です。当たり前だけどルートの中身の $\sin^2\theta-\sin\theta+1$ が最大となるとき S も最大となり、ルートの中身が最小となるとき S も最小となります。

これからはルートの中身の $\sin^2\theta-\sin\theta+1$ の最大値・最小値を求めていきます。$\sin\theta = t$ と置換して解いていきます。

$\sin^2\theta-\sin\theta+1$ が最大となるとき S も最大となり、$\sin^2\theta-\sin\theta+1$ が最小となるとき S も最小となる。

以下、$\sin^2\theta-\sin\theta+1$ の最大値・最小値を考える。

$\sin\theta = t$ とする。$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ となる。

$$\sin^2\theta-\sin\theta+1$$
$$=t^2-t+1$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$t=-1$ のとき $\sin^2\theta-\sin\theta+1$ は最大値 3 をとり、$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin^2\theta-\sin\theta+1$ は最小値

$\frac{3}{4}$ をとる。

よって、S の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、最小値は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ となる。

＊今回は、最大や最小となる θ の値を求めよ、と問題文に書かれていません。基本的に、問題文で書かれていないことは求める必要はありません。だから、解答用紙に記入しなくて OK ですよ。

ただ、学校の定期試験は先生にあわせてください。高校教師の中には、問題文に書かれていなくてもそのときの θ の値をかけ、という教師もいます。

今回の問題どうでしたか？意外に簡単だな、と思った人もいると思います（もちろん、受験生の話しですよ。高校 2 年生の人にとっては難しいですよ）。

ただ、これは一橋大学の過去問です。大問 5 問のうちの 1 問がこの問題です。

難関大学を受ける人は、むやみやたらに難しい問題をする人がいます。ですが、難関大学であったとしても、こういった基本問題が出題されます。

難しい問題をするな、とは言いません。ただ、まずは、基本的な問題を着実に解けるようになってから難しい問題をするようにしてください。

よく言われることですが、「基本問題を解けること」が何よりも重要ですよ。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるとたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司