

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！
<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

- (1) $x = -2$ で極値 α をとり、 $x = 0$ で極値 0 をとる 3 次関数 $y = f(x)$ を求めなさい。
- (2) 関数 $y = f(x)$ 上の点 $P(1, f(1))$ を接点とする接線 l を求めなさい。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ 、接線 l および x 軸で囲まれる図形の面積が $\frac{1}{12}$ になるように α の値を定めなさい。

【問題の解説】

数学 II の微分積分の問題です。やることとしては、それほど難しくありません。

ですが、文字を含んでいるので多少難しいです。「文字を含んでいても、やることとしては同じ！」ということのを頭に叩き込みながら解いてください。

【問題（1）の解答】

*関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとき $f'(a) = 0$ です。ただ、これは必要条件です ($f'(a) = 0$ となっても、必ずしも $f(a)$ が極値となる訳ではない)。だから、 $f'(a) = 0$ で解いたあとに十分性を確認しておかないといけません。

求める 3 次関数を $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) とする。

↑もし $a = 0$ だと $f(x)$ は 3 次関数ではなくなります。だから、 $a \neq 0$ がいますよ。

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x = -2$ で極値 α をとるので、 $f(-2) = \alpha, f'(-2) = 0$ がいえる。また、 $x = 0$ で極値 0 をと

るので $f(0) = 0, f'(0) = 0$ がいえる。

$f(-2) = \alpha$ より $-8a + 4b - 2c + d = \alpha \cdots \textcircled{1}$ 、 $f'(-2) = 0$ より $12a - 4b + c = 0 \cdots \textcircled{2}$ 、 $f(0) = 0$ より $d = 0 \cdots \textcircled{3}$ 、 $f'(0) = 0$ より $c = 0 \cdots \textcircled{4}$ 。

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$ より $a = \frac{\alpha}{4}, b = \frac{3\alpha}{4}, c = 0, d = 0$ (ただし、 $\alpha \neq 0$ ($\leftarrow \alpha = 0$ だと $a = 0$ となるので、不適!))。

*ここまでは必要条件で解いてきました。ここから、充分性の確認です。

このとき、 $f(x) = \frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2$ となり、 $f'(x) = \frac{3\alpha}{4}x^2 + \frac{3\alpha}{2}x = \frac{3\alpha}{4}x(x+2)$ となり、 $x = 0$ と $x = -2$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わる。よって、 $x = 0, -2$ で $f(x)$ は極値をもつ。

↑ 通常、充分性の確認のときは増減表を書くことが多いです。ただ、今回の場合、 α の符号によって場合分けが必要です。 $\alpha \neq 0$ のとき、 $f(x)$ は極値を持つので、上記のような説明で十分です。もちろん、 $\alpha > 0$ のときと、 $\alpha < 0$ のときとで場合分けをして、それぞれ増減表を書いてもらってもいいですよ。

よって、 $f(x) = \frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2$

【問題 (2) の解答】

$f(x) = \frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2$ 、 $f'(x) = \frac{3\alpha}{4}x^2 + \frac{3\alpha}{2}x$ となる。

$f(1) = \frac{\alpha}{4} + \frac{3\alpha}{4} = \alpha$ 、 $f'(1) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{3\alpha}{2} = \frac{9\alpha}{4}$

よって、求める接線の l の方程式は

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y = \frac{9\alpha}{4}(x - 1) + \alpha$$

$$= \frac{9\alpha}{4}x - \frac{5\alpha}{4}$$

よって、接線 l は直線 $y = \frac{9\alpha}{4}x - \frac{5\alpha}{4}$ である。

【問題（3）の解説】

α の符号で $y = f(x)$ のグラフが変わってくるので、接線 l との上下関係も変わってきます。

ただ、その前にまず $y = f(x)$ と接線 l の共有点の x 座標を求めていきます。 $y = \frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2$ と $y = \frac{9\alpha}{4}x - \frac{5\alpha}{4}$ で y を消去して、 $\frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2 = \frac{9\alpha}{4}x - \frac{5\alpha}{4}$ となり、この方程式を整理すると

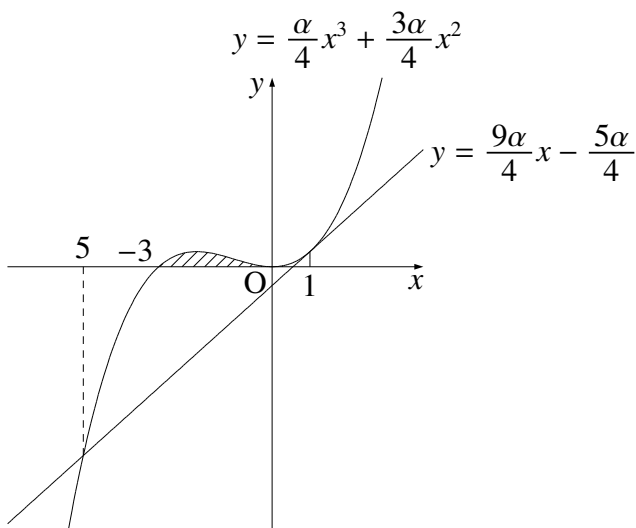
$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0 \text{ となります。}$$

3次式以上の方程式を高次方程式というんだっただよ。この高次方程式ですが、まず答えをひとつみつけて…と解いていくんだっただよ。

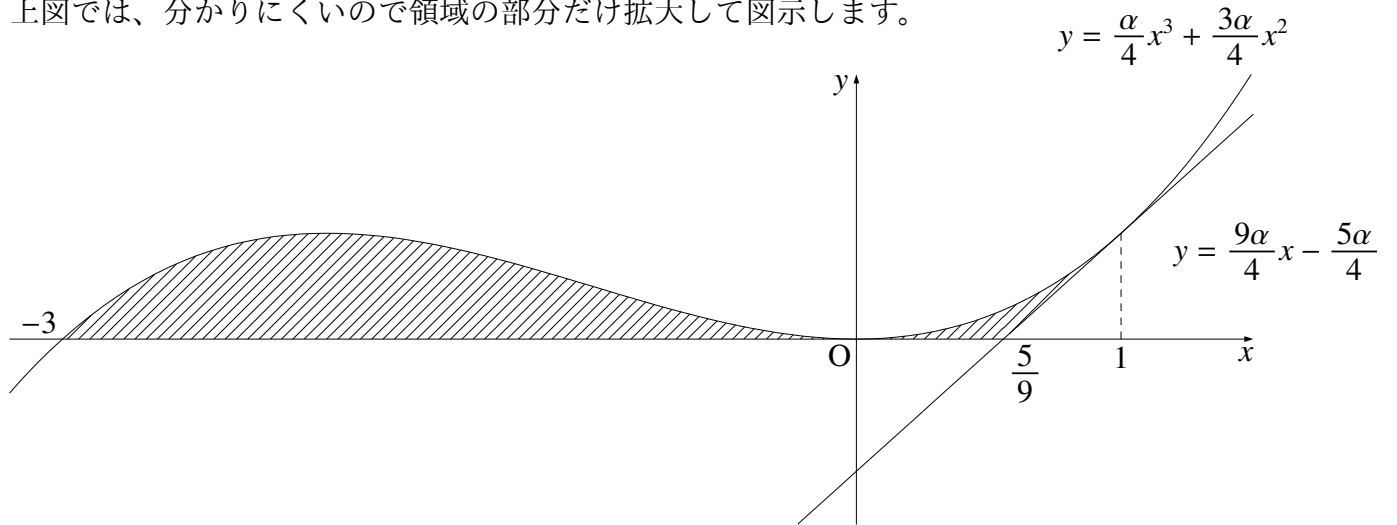
ただ、今回の方程式の解は $x = 1$ が解だともう分かっているよ。しかも、 $x = 1$ は重解です。

なぜかと言えば、今回は $x = 1$ における接線なんだよ。ということは、当然 $x = 1$ が重解となります。「何、当たり前のこと言ってるの?」と思う人もいます。でも、意外にこのことを知らない人がいるので、話しておきました。

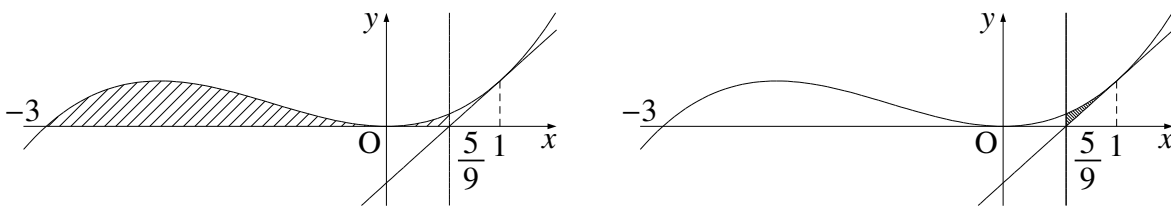
$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ は $x = 1$ を重解にもちます。だから、 $x - 1$ で2回割ることができますよ。組み立て除法で2回割ると $(x - 1)^2(x + 5) = 0$ となるので、共有点の x 座標は $x = 1, -5$ となります。 $\alpha > 0$ のときの、3次関数のグラフと接線を図示します。



上図では、分かりにくいので領域の部分だけ拡大して図示します。



で、上図の面積を求めるとき、下図のように斜線部を2つの分部に分け

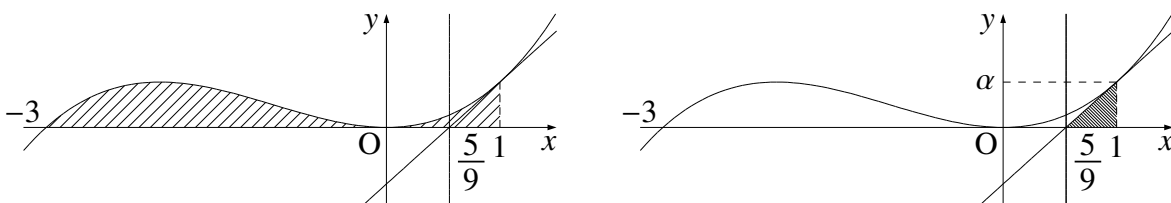


上図左側の面積は $\int_{-3}^{\frac{5}{9}} \left(\frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2 \right) dx$

↑ $x=0$ では x 軸と接するだけで3次関数のグラフと x 軸の上下関係が変わるわけではないので、2つの分部の面積を一気に求めることができます。

上図左側の面積は $\int_{\frac{5}{9}}^1 \left\{ \frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2 - \left(\frac{9\alpha}{4}x - \frac{5\alpha}{4} \right) \right\} dx$ と求めて、2つの面積を足して求める人がいます。

もちろんこういうふうにしてもいいけど、下図のように求めた方がラクですよ。



上図に左側の斜線部の面積から、右側の斜線部の面積を引いたものが今回求める面積です。 $\int_{-3}^1 \left(\frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2 \right) dx$ で求めることが、右側は3角形的面積だから積分をしなくても求めることができるよね。こっちの方が計算がラクですよ。

*面積を求めるとき、何も考えずに単に面積を求めようとする人が多いです。ですが、面積は求め方によって計算の量がまったく変わってくることもあります。今回の問題も、全体から三角形の面積を引いて求める方がラクだよ。

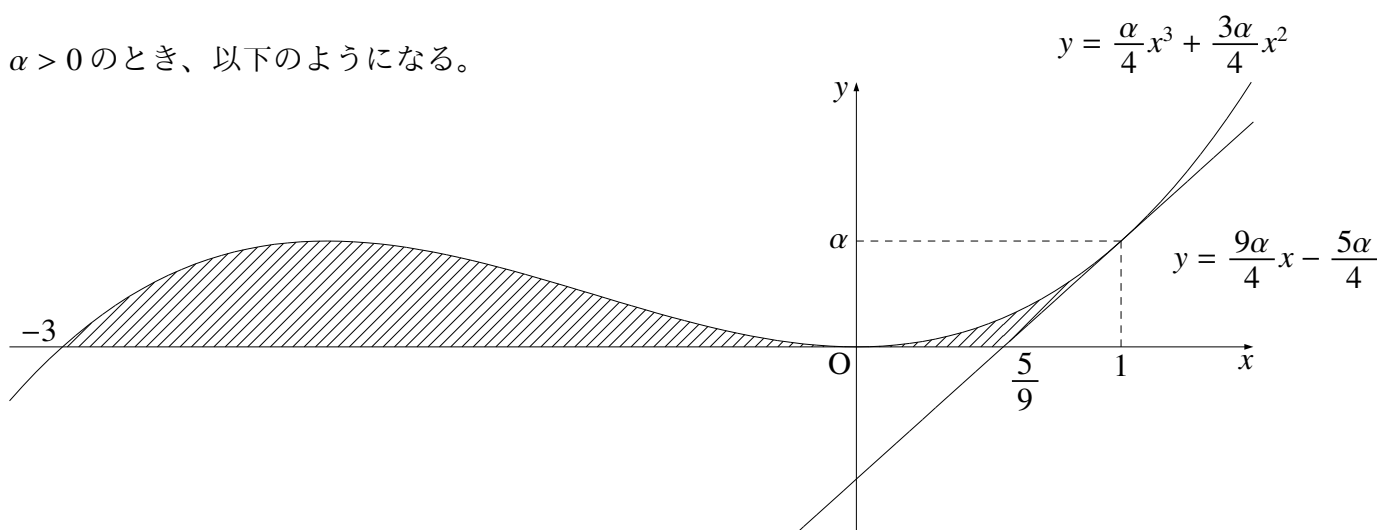
面積を求めるときはいきなり面積を求めるのではなく、「どうやったら一番計算がラクになるだろう?」と考えてから解くようにしてくださいね。

【問題（3）の解答】

$$y = \frac{3\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{2}x, y = \frac{9\alpha}{4}x - \frac{5\alpha}{4} \text{ より } \frac{\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{4}x^2 = \frac{9\alpha}{4}x - \frac{5\alpha}{4} \text{ となる。}$$

これより $x^3 + 3x^2 = 9x - 5$ となり、整理すると $(x-1)^2(x+5) = 0$ となる。

$\alpha > 0$ のとき、以下のようなになる。



上図斜線部の面積は

$$\int_{-3}^1 \left(\frac{3\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{2}x \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5}{9} \right) \cdot \alpha$$

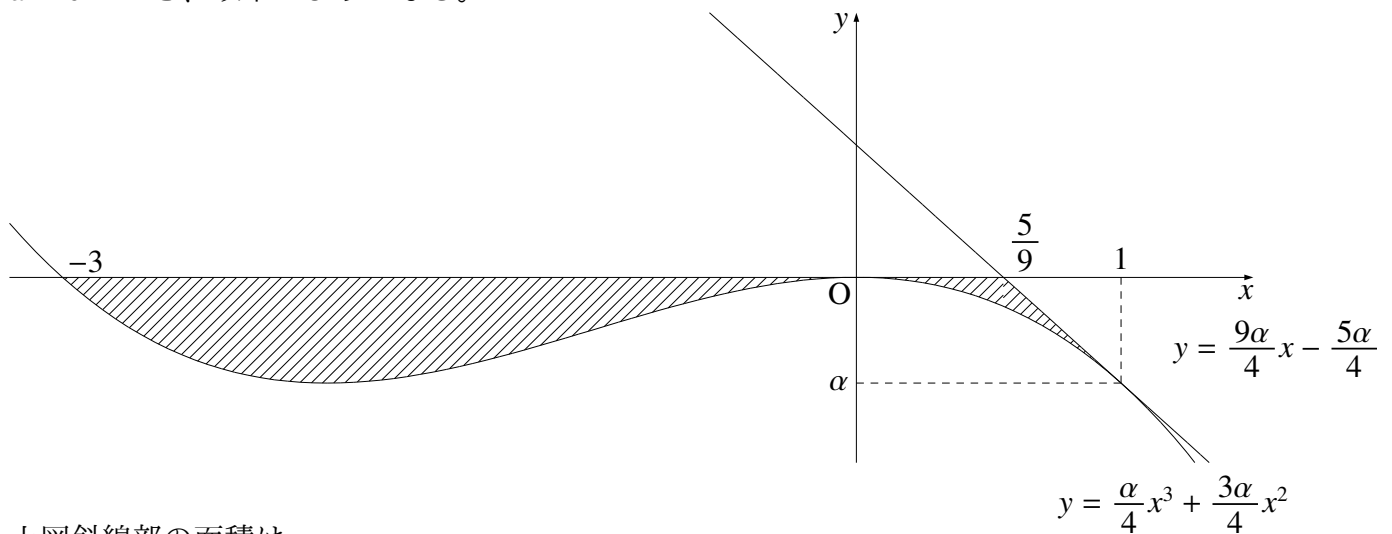
↑ 解説で説明したように、 $-3 \leq x \leq 1$ で3次関数のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積から、三角形の面積を引いた！

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\alpha}{16}x^4 + \frac{\alpha}{4}x^2 \right]_{-3}^1 - \frac{2}{9}\alpha \\
&= \frac{\alpha}{16} + \frac{\alpha}{4} - \frac{81}{16}\alpha + \frac{27}{4}\alpha - \frac{2}{9}\alpha \\
&= -\frac{80}{16}\alpha + \frac{28}{4}\alpha - \frac{2}{9}\alpha \\
&= -5\alpha + 7\alpha - \frac{2}{9}\alpha \\
&= \frac{16\alpha}{9}
\end{aligned}$$

この部分の面積が $\frac{1}{12}$ となるので、 $\frac{16\alpha}{9} = \frac{1}{12}$ つまり $\alpha = \frac{3}{64}$

これは $\alpha > 0$ をみたとす。

$\alpha < 0$ のとき、以下のようになる。



上図斜線部の面積は

$$\begin{aligned}
& \int_{-3}^1 \left\{ -\left(\frac{3\alpha}{4}x^3 + \frac{3\alpha}{2}x \right) \right\} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5}{9} \right) \cdot (-\alpha) \\
&= \left[-\frac{\alpha}{16}x^4 - \frac{\alpha}{4}x^2 \right]_{-3}^1 + \frac{2}{9}\alpha \\
&= -\frac{\alpha}{16} - \frac{\alpha}{4} + \frac{81}{16}\alpha + -\frac{27}{4}\alpha + \frac{2}{9}\alpha \\
&= \frac{80}{16}\alpha - \frac{28}{4}\alpha + \frac{2}{9}\alpha \\
&= 5\alpha - 7\alpha + \frac{2}{9}\alpha \\
&= -\frac{16\alpha}{9}
\end{aligned}$$

この部分の面積が $\frac{1}{12}$ となるので、 $-\frac{16\alpha}{9} = \frac{1}{12}$ つまり $\alpha = -\frac{3}{64}$

これは $\alpha < 0$ をみたとす。

以上より、 $\alpha = \pm \frac{3}{64}$ である。

今回の問題はどうかだったでしょうか。冒頭でも話しましたが、やっていること自体は難しくありません。ですが、文字を含んでいるので難しく感じた人もいると思います。

こういうふうに文字式を含んだ計算は受験では頻出です。解けるようになっておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司