「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

x^{2009} を x^2+1 で割ったときの余りを求めよ。

【問題の解説】

大きく分けて２つの解法があります。２つとも重要なので、２つの解法で解いていきます。

【虚数を使って解く解法の解説】

A を B で割ったとき商が Q で余りが R のとき、$A=BQ+R$ が成立するんだよね。

x^{2009} を x^2+1 で割ったときの商を $Q(x)$、余りを $ax+b$ とでもします。
⇑ 整式を n 次式で割ったときの商は $n-1$ 次式以下です。今回の場合、x^2+1 と２次式で割ります。このとき、余りは１次式以下です。だから、$ax+b$ と置きました。

余りを１次式以下と言いました。２次式で割ったとき、多くの場合で余りは１次式です。ただ、割り切れる場合もあるし、そのときの余りは１次式ではなくて定数となります。だから、１次式以下です。余りを $ax+b$ とおきました。$a=0$ のとき、x がなくなって定数となるので１次式以下の場合でも、余りを $ax+b$ と置いたら OK ですよ。

$x^{2009}=(x^2+1)Q(x)+ax+b$ とおきます。ここから、どうしようかな？と悩む人がいます。例えば、$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ のとき、$f(1)$ や $f(2)$ を計算したよね。この１や２はどこから来たかと言うと、$Q(x)$ の前についている $(x-1)(x-2)$ が０となるときです。

じゃあ、今回も同じです。今回の場合 $Q(x)$ の前についているのは x^2+1 です。$x^2+1=0$ を解くと $x=\pm i$ となるので、$x=\pm i$ を入れて解いていきます。

＊ $\pm i$ のうち i でも $-i$ でも解けます。でも、マイナスは計算しにくいので i の方で解いていきますよ。

たまに、「虚数を代入して大丈夫なのですか？」と質問をされます。でも、虚数を入れてっも大丈夫ですよ。覚えておいてくださいね。

【虚数を使って解く解法の解答】

x^{2009} を x^2+1 で割ったときの商を $Q(x)$、余りを $ax+b$ とする。ただし、a,b は実数。

$x^{2009}=(x^2+1)Q(x)+ax+b\cdots①$

＊ i^{2009} が必用になるので、まず最初に i^{2009} を計算しておきます。

$$\begin{aligned}&i^{2009}\\=&i\cdot i^{2008}\\=&i\cdot(i^2)^{1004}\\=&i\cdot(-1)^{1004}\quad(\because\ i^2=-1)\\=&i\end{aligned}$$

⇑$(-1)^n$ は n が偶数のとき 1 で、n が奇数のとき -1 ですよ。だから、$(-1)^{1004}=1$ です。

① に $x=i$ を代入する。

$$\begin{aligned}i^{2009}&=(i^2+1)Q(i)+ai+b\\i&=ai+b\quad(\because\ i^{2009}=i)\end{aligned}$$

a,b は実数より $a=1,b=0$ となる。

⇑ a,b,c,d が実数のとき、$a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$ より！

よって、余りは $\boldsymbol{x}$

＊「余りを求めるときに、虚数なんて使うの？」なんて思った人もいるかもしれません。はじめて見たときはびっくりするよね。でも、たまに出てきますよ。覚えておいてくだ

さいね。

【2項定理を使って解く解法の解説】

先ほどは虚数を使って解く解法でときました。ですが、この問題は2項定理を使っても解くことができますよ。

少し気づきにくい変形をして解いていきます。最初のうちは難しく感じるかもしれませんが、重要な解法ですよ。しっかりと理解しておいてくださいね。

2項定理について

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

あまり知らない人が多いですが、2項定理を使えば余りを求められることがあります。

今回は、x^2+1 を含んだ式を強引に作り出します。x^n で n が奇数だと無理なので（理由はのちほど分かります）、x^n で n の部分を偶数としてから考えていきます。

今回の場合、x^{2009} と奇数なので、$x^{2009} = x \cdot x^{2008}$ と変形します。まず、x^{2008} を変形して、あとから x をかけます。

ここから、x^{2008} を2項定理を使って変形していきます。

まず $(a^m)^n = a^{mn}$ の指数法則を使って、$x^{2008} = (x^2)^{1004}$ と変形します。こうして強引に x^2 を作り出しました。

さらに、$x^2 = (x^2+1) - 1$ と変形できるよね。今回は、x^2+1 で割ったときの余りを求めたい訳です。2項定理を使って強引に (x^2+1) を含んだ式を作り出します。

$(x^2)^{1004}$

$=\{(x^2+1)-1\}^{1004}$ ◀ $x^2 = (x^2+1)-1$ より！

$=(x^2+1)^{1004} + {}_{1004}\mathrm{C}_1(x^2+1)^{1003}(-1) + {}_{1004}\mathrm{C}_2(x^2+1)^{1002}(-1)^2 + \cdots + {}_{1004}\mathrm{C}_{1003}x^2(-1)^{1003} + {}_{1004}\mathrm{C}_{1004}(-1)^{1004}$

⇑ 2項定理を使って展開をした！

$=(x^2+1)^{1004} + 1004(x^2+1)^{1003}(-1) + 502 \cdot 1003(x^2+1)^{1002} + \cdots - 1004(x^2+1) + 1$

２肯定理を使って展開をして整理すると、上記のようになりました。

$$(x^2+1)^{1004}+1004(x^2+1)^{1003}(-1)+502\cdot 1003(x^2+1)^{1002}+\cdots-1004(x^2+1)+1$$
$$=(x^2+1)\{\underline{(x^2+1)^{1003}+1004(x^2+1)^{1002}(-1)+502\cdot 1003(x^2+1)^{1001}+\cdots-1004}\}+1$$

上図の下線部の $(x^2+1)^{1003}+1004(x^2+1)^{1002}(-1)+502\cdot 1003(x^2+1)^{1001}+\cdots-1004$ を $Q(x)$ とでも置くと、

$x^{2008}=(x^2+1)Q(x)+1$ と変形できます。さらに、両辺に x をかけると $x^{2009}=(x^2+1)xQ(x)+x$ となります。この式より、x^{2009} を x^2+1 で割った余りは $\boldsymbol{x}$ となります。

今回２つの解き方で解きました。両方とも、知らない人にとっては難しかったかもしれません。

ですが、受験でもこういったタイプの問題はよく出てきますよ。解けるようになっておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司