「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

関数 $y = x^2$ のグラフ C と、定点 $A\,(0\,,a)\,(a > 0)$ を通り傾き t の直線 l との交点を $P,\ Q$ とする。さらに、点 P における C の接線と点 Q における C の接線の交点を R とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を a と t を用いて表せ。

(2) 三角形 PQR の面積 S を a と t を用いて表せ。

(3) 三角形 PQR の重心を G とする。直線 l の傾き t が実数全体を動くとき、点 G の軌跡を求めよ。

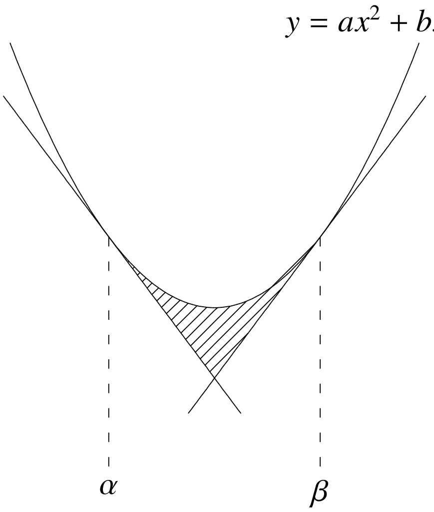
【問題の解説】

新潟大学の過去問です。放物線と２接線によって囲まれた部分の面積を求める本当に典型的な問題です。

典型的な問題ではありますが、知らない人も多いと思います。決して難しくはない内容です。過去に本当にいろいろな大学で出題された内容ですので、この問題を通して理解しておいてください。

この問題に入る前に次の事柄を覚えておいてください。

放物線と２接線によって囲まれる部分の面積



上図のように、放物線と２接線によって囲まれる部分の面積 S は、$S = \dfrac{a}{12}(\beta - \alpha)^3$ となる。ただし、$a > 0$ のとき。

ちなみに $a < 0$ のときは、$S = \dfrac{-a}{12}(\beta - \alpha)^3$ となります。

問題として出題される２次関数は $y = x^2$ となることが多いです。このとき、２接線の交点の座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ となります。これは、計算で求めることができますが、よく出る性質なので暗記しておいた方がいいと思います。ちなみに $y = ax^2$ のときは、交点の座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$ となります。

これらのことについていは以下のページでより詳しく説明しているので、興味のある人はこちらのページを見てください。
http://www.hmg-gen.com/tecni2b-5.pdf

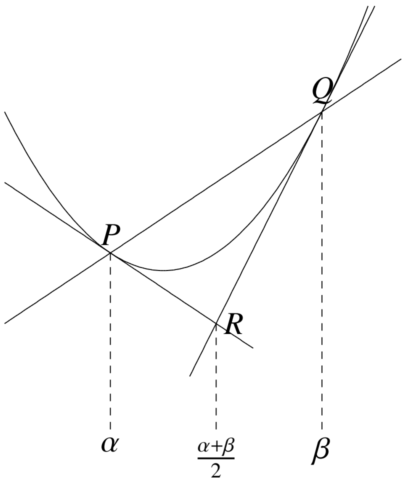
【問題（１）の解説】

P の x 座標を α とし、Q の x 座標を β とします。先ほどいったように、２接線の交点の座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ となります。

$\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ は解と係数の関係で求めることができるので、この問題は先ほどの性質さえ理解していればごくごく簡単に求めることができます。

ただ、先ほどの性質は公式としては使えないので解答では以下のように書くようにしてください。

【問題（１）の解答】



直線 l は定点 $(0, a)$ を通り傾き t の直線なので $l : y = tx + a$ となる。

上図のように P の x 座標を α、Q の x 座標を β とする。

P における $y = x^2$ の接線の方程式は、

$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$

$y = 2\alpha x - \alpha^2 \cdots$ ①

同様に、Q における接線の方程式は $y = 2\beta x - \beta^2 \cdots$ ②⇐ わざわざ計算をする必要はないよ。点 P の接線の α のところに β を代入すると、点 Q における接線となります。となる。

①, ② を連立すると $(x, y) = \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta\right)$ となる。
⇑実際に ①, ② を連立して計算したらこのようになります。ただ、先ほども言いましたがこれは覚えておいてください。

ここで、α と β は $x^2 = tx + a$ つまり $x^2 - tx - a = 0$ の解なので、解と係数の関係より、$\alpha + \beta = t,\ \alpha\beta = -a$ となる。

以上より、点 R の座標は $(x, y) = \boldsymbol{\left(\frac{t}{2},\ -a\right)}$ となる。

【問題（2）の解説】

三角形 PQR の面積を求めよといった問題です。座標が与えられているときの三角形の面積は、$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$ の公式を使って求めるのが基本です。今回の問題もこれで解いていきます。

また今回の問題は α, β のまま計算をしていき、最後に $\alpha + \beta = t,\ \alpha\beta = -a$ を代入して与式を a, t のみで表します。

途中で、$(\beta - \alpha)^3$ の計算をする必要があります。何も考えていない人は展開なんかをしてわけのわからない式になってしまいますが、これは重要な式変形ですので覚えておいてください。

重要な式変形

$\alpha < \beta$ つまり $\beta - \alpha > 0$ のとき

$(\beta - \alpha)^3$

$= \left\{(\beta - \alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ ◀ 指数公式 $(a^m)^n = a^{mn}$ より、$a^3 = (a^2)^{\frac{3}{2}}$

⇑ 上記の指数法則は $a > 0$ のときに成立します。

今回の場合、$\beta - \alpha > 0$ より、指数法則を使って OK です。

$= (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)^{\frac{3}{2}}$

$= \left\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$ ◀ $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ のみで表せた

上記の式変形のポイントは３乗だと対称式になってくれないから、強引に２乗の形にするということですが、こんなの知らなかったら普通気づかないよね？よく出る式変形なので覚えておいてください。それでは、解答に進みます。

【問題（２）の解答】

$P(\alpha,\ \alpha^2),\ Q(\beta,\ \beta^2),\ R\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$

原点を O とする。

⇑ 原点を O とするは書かなくても OK かもしれません。ですが、基本的に数学では問題文で与えられていない文字を使うときは、ひと言説明してから使うようにしてください。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\alpha,\ \alpha^2),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\beta,\ \beta^2),\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= (\beta,\ \beta^2) - (\alpha,\ \alpha^2)\\ &= (\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right) - (\alpha,\ \alpha^2)\\ &= \left(\frac{\beta-\alpha}{2},\ \alpha\beta-\alpha^2\right)\end{aligned}$$

よって、三角形 PQR の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)(\alpha\beta-\alpha^2)-(\beta^2-\alpha^2)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right|$$ ◀ 三角形の面積の公式 $S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ より

$$= \frac{1}{2}\left|\alpha(\beta-\alpha)^2-(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\alpha(\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)^2\cdot\frac{\beta+\alpha}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)^2\left(\alpha-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)^2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}$$ ◀ $|(\beta-\alpha)^2|=(\beta-\alpha)^2,\ \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=\frac{\beta-\alpha}{2}$ より

$$= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(t^2+4a)^{\frac{3}{2}}}$$

＊少し計算がながくなりましたが、これは http://www.hmg-gen.com/tecni2b-5.pdf このページで説明している内容を知っていればごくごく簡単に求めることができます。

三角形 PQR の面積とは、直線と放物線によって囲まれた部分の面積 $(=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3)$ と 2 接線によって囲まれた部分の面積 $(=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3)$ の和なので、$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$ となります。次に (3) に進みます。

【問題（３）の解説】

普通、大学受験の問題では (1), (2), (3) となっていると、(3) は (1) や (2) に関係するものが多いですが、今回の問題は関係ありません。まれにこういった出題もされるので注意しておくようにしてください。

この問題はごくごく基本的な問題なので解けないといけません。重心の性質として次のことを覚えておいてください。

重心について

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ のとき、
三角形 ABC の重心の座標は $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ となる。

【問題（３）の解答】

$P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$, $R\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$

G の座標を (X, Y) とする。

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\alpha + \beta + \frac{\alpha+\beta}{2}}{3} \\
&= \frac{2\alpha + 2\beta + \alpha + \beta}{6} \\
&= \frac{3\alpha + 3\beta}{6} \\
&= \frac{\alpha + \beta}{2} \\
&= \frac{\frac{t}{2}}{2} \\
&= \frac{t}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}{3} \\
&= \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta}{3} \\
&= \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + a}{3} \\
&= \frac{\frac{t^2}{4} + a}{3} \\
&= \frac{t^2 + 4a}{12}
\end{aligned}
$$

$X = \dfrac{t}{4}$ より、$t = 4X$ となる。これを $Y = \dfrac{t^2 + 4a}{12}$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{(4X)^2 + 4a}{12} \\
&= \frac{16X^2 + 4a}{12} \\
&= \frac{4}{3}X^2 + \frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

よって、求める軌跡は**放物線 $y = \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{a}{3}$** である。

これで、今回の解説は終わりです。冒頭にも言いましたが、放物線と２接線に関する問題は本当に頻出です。知っていたらこれほど簡単な問題はありません。しっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司