「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a, b を実数とする。３次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ について、曲線 $y = f(x)$ は原点で直線 $y = -x$ に接し、極大値と極小値の差は４であり、極大値と極小値の和は正の値となる。このとき、a, b の値を求めなさい。

【問題の解説】

数学って、問題に書かれていることから解いていきます。今回の場合、「曲線 $y = f(x)$ は原点で直線 $y = -x$ に接する」「極大値と極小値の差は４」「極大値と極小値の和は正の値」この３つが問題で与えられているよね。これらを使って問題を解いていきます。

「こうきたらこうやって解いていく」と決まりきった解法のものがあります。いわゆる典型問題と呼ばれるものです。

今回も、それにあてはまるもので、「２曲線接する」「３次関数の極値の差」「３次関数の極値の和」とくらばすぐに以下の事柄を思い出さないといけません。

まずは、「２曲線が接する」からです。これがきたら以下のことを思い出してください。

２曲線が接する条件

２曲線 $y = f(x), y = g(x)$ が $x = t$ で接するとき、「$f(t) = g(t)$ かつ $f'(t) = g'(t)$」が成立する。

少し言葉の話しです。数学では、直線も曲線に含まれます。今回の場合、一方が直線だ

けどいいの？なんて思う人もいるけど、別に OK ですよ。

問題で「接する」ときたら上記を使うことが多いです。ただ、「放物線と直線」や「放物線と放物線」の場合、判別式で解くことが多いです。

上記は、あらゆる曲線で成立するので、放物線のときも上記で解いてもらっても OK です。ただ、判別式の方が計算がラクになることが多いので、放物線のときだけは、判別式を使うことがあります。

それ以外のときは、上記を使います。「２曲線が接する」と問題文に書かれていたら、すぐに思い出せるようにしておいてくださいね。

次に、「３次関数の極大値と極小値の差」に関してです。３次関数の極大値と極小値の差は、解法が決まっています。よく出てくるので覚えておいてくださいね。

「３次関数の極大値と極小値の差」は、以前にも解説しています。詳しくは、以下のプリントで勉強をしておいてください。
「極大値と極小値の差に関する問題の解説プリント」https://www.hmg-gen.com/merumaga2b-13.pdf

それでは、解答に進みます。

【問題の解答】

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ より $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$g(x) = -x$ とする。$g'(x) = -1$ となる。

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ は、$x = 0$ で接するので $f(0) = g(0)$ かつ $f'(0) = g'(0)$ が成立する。
⇑ ２曲線が接する条件より！

$$f(0) = g(0)$$

$$0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 = -0$$

$$0 = 0$$

これは、常に成立する。

＊ a, b の値に関係なく。常に $0 = 0$ となります。この等式は成立しているよね。だから、もしここから条件を出すとすれば、a, b はすべての実数、となります。

$$f'(0) = g'(0)$$

$$3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 01$$

$$b = -1$$

＊これで、$b = -1$ ということが分かったので、$f(x) = x^3 + ax^2 - x$ であることがわかりました。あとは、a の値を求めれば終了です。

$f'(x) = 0$ の 2 解を α, β として解いていきます。ただ、その前に $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持たないといけません。判別式でやっていきます。

$f(x)$ が極値を持つとき、2 次方程式 $f'(x) = 0$ は異なる 2 個の実数解をもつ。$f'(x) = 0$ の判別式を D とする。

$\dfrac{D}{4} = a^2 + 3 > 0$ となる。よって、a の値に関係なく $f(x)$ はつねに極大値と極小値をもつ。

$f'(x) = 0$ の 2 解を α, β $(\alpha < \beta)$ とする。

増減表は以下のようになる。

x		α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

増減表より、$f(\alpha)$ が極大値、$f(\beta)$ が極小値となる。

＊ここからは、３次関数の極値の差の知識を使って解いていきます。これは、https://www.hmg-gen.com/merumaga2b-13.pdf のプリントで詳しく解説しています。知らない人は見ておいてください。

α, β は $f'(x) = 0$ つまり $3x^2 + 2ax - 1 = 0$ の２解である。解と係数の関係より、
$\alpha + \beta = -\dfrac{2}{3}a, \alpha\beta = -\dfrac{1}{3}$ となる。

＊極大値が $f(\alpha)$、極小値が $f(\beta)$ なので、極大値と極小値の差は $f(\alpha) - f(\beta)$ です。ですが、$f(\beta) - f(\alpha)$ の方が求めやすいので、まずはこれを求めてから解いていくことにします。

$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$ となる。

$$
\begin{aligned}
f(\beta) - f(\alpha) &= \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= 3 \cdot \left\{-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3\right\} \\
&= -\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3
\end{aligned}
$$

よって、極大値と極小値の差は $f(\alpha) - f(\beta) = \dfrac{1}{2}(\beta - \alpha)^3$ となる。極大値と極小値の性４となるので、

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=4$$
$$(\alpha-\beta)^3=8$$
$$\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=8\ \ (\because\ \ \beta-\alpha>0)$$
$$\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=8$$ ◀ これで $\alpha+\beta, \alpha\beta$ のみで表せた！
$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$$ ◀ 両辺を $\frac{2}{3}$ 乗した！
$$\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=4\ \ \left(\because\ \ \alpha+\beta=-\frac{2}{3}a, \alpha\beta=-\frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{3}=4$$
$$a^2=6$$
$$a=\pm\sqrt{6}$$

＊ここまではかなり強引な式変形もしました。「よく分からない」という人は、https://www.hmg-gen.com/merumaga2b-13.pdf のプリントを見てください。まったく、同じことをしていますよ。

で、ここからはまだ「極値の和が正」を使っていないよね。絶対とは言わないけど、数学の答えはひとつになることが多いです。現時点では $a=\pm\sqrt{6}$ と答えがふたつあります。

おそらく、この極値の和が正を使って、答えがひとつに限定されるのだと思います。

$$\begin{aligned}
&f(\alpha)+f(\beta)\\
=&(\alpha^3+a\alpha^2-\alpha)+(\beta^3+a\beta^2-\beta)\\
=&\alpha^3+\beta^3+a(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)\\
=&(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-(\alpha+\beta)\\
=&\left(-\frac{2}{3}a\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)+a\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}-\left(-\frac{2}{3}a\right)\\
=&-\frac{8}{27}a^3-\frac{2}{3}a+\frac{4}{9}a^3+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}a\\
=&\frac{4}{27}a^3+\frac{2}{3}a
\end{aligned}$$

$a = \sqrt{6}$ のとき、$f(\alpha) + f(\beta) = \dfrac{4}{27} \cdot \sqrt{6}^3 + \dfrac{2}{3}\sqrt{6} = \dfrac{14}{9}\sqrt{6} > 0$

$a = -\sqrt{6}$ のとき、$f(\alpha) + f(\beta) = \dfrac{4}{27} \cdot (-\sqrt{6})^3 + \dfrac{2}{3} \cdot (-\sqrt{6}) = -\dfrac{14}{9}\sqrt{6} < 0$

極大値と極小値の和は正であるので、$a = -\sqrt{6}$ は不適である。

以上より、$a = \boldsymbol{\sqrt{6}, b = -1}$ となる。

今回の問題はどうだったでしょうか？

知らなかった人は難しかったと思います。一方、知っている人にとっては簡単だっと思います。

数学ってこういうふうに、「解法を知っていれば、何も考えずに解ける」という問題が多いですよ。

典型問題の解法を暗記していくことが重要ですよ。頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司