

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅱの「式と証明」 難易度：「基礎」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ のとき、 x, y, z のうち少なくともひとつは1であることを示せ。

【解説】

まず、以下を覚えておいてください。

少なくともひとつが a であることの証明

$$\begin{aligned} & x, y, z \text{ のうち少なくともひとつが } a \\ \Leftrightarrow & (x - a)(y - a)(z - a) = 0 \end{aligned}$$

まず、上記がなぜ成立するか話しておきます。これは、簡単ですよ。

例えば、 $xyz = 0$ が成立しているときの話です。3つの数をかけて0になるとは、 x, y, z のうち少なくともひとつが0でないといけないよね（0がないと3つの数をかけて0にならない！）。

ちなみに、「 x, y, z のうち少なくともひとつが0」を言い換えたなら「 $x = 0$ または $y = 0$ または $z = 0$ 」と同値ですよ。普段の言葉で「または」ときたらどちらか一方しかささないことが多いけど、数学で「または」は「少なくともひとつ」という意味です。気を付けてくださいね。

じゃあ、これと同じような感じです。「 $(x - a)(y - a)(z - a) = 0$ 」は「 $x - a = 0$ または $y - a = 0$ または $z - a = 0$ 」つまり「 $x = a$ または $y = a$ または $z = a$ 」

これで、上記の「 $(x, y, z$ のうち少なくともひとつが a) $\Leftrightarrow ((x - a)(y - a)(z - a) = 0)$ 」が成立するということが確認できました。

今回の問題では x, y, z のうちすくなくともひとつが1であるなので、「 $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 0$ 」を示せばOKです。

この問題に限った話ではありません。数学は「こうきたらこうする」という決まりきった解法が存在する問題が多いです。

こういった問題は、問題を見た瞬間に「ああ、こうやって解くんだな」と気づけるようになっておいてくださいね。

よく、数学は考える科目と言って暗記しない人がいます。もちろん、その場で考えて思いつくんだったらそれでいいですよ。

でも、普通の人には、ほとんどというか絶対にムリです。まずは、地道に解法を覚えていてくださいね。そうすると、必ずできるようになりますよ。

それでは、問題に戻ります。ここまでの「 $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 0$ 」を示せばOKということが分かったんだよね。

で、ここから「どうしようかな?」と思うんだけど、今回の場合与えられた条件の $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ も証明したい式の $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 0$ もすべて対称式なんだよね。

対称式について分からない人は、以下のリンク先を見てください。

対称式の解説プリント：<https://www.hmg-gen.com/taisyouyosiki.pdf>

対称式の練習問題の解答：<https://www.hmg-gen.com/k-taisyouyosiki.pdf>

対称式の問題は、とりあえず基本対称式を求めることが決まりごとだったんだよね。

3文字の対称式の基本対称式は $x + y + z$, $xy + yz + zx$, xyz です。とりあえず、これらの形のみにして解いていけばうまくいきます。

ここからは、簡単なのでいきなり解答に進みます。解答を参考に解けるようになっておいてください。

【解答】

「 x, y, z のうちすくなくともひとつが1である」ことと「 $(x-1)(y-1)(z-1) = 0$ が成立する」ことは同値である。

今から、「 $(x-1)(y-1)(z-1) = 0 \cdots \textcircled{1}$ が成立する」を示す。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = 1 \quad \leftarrow \text{分数の対称式のときはとりあえず通分する！}$$

$$xy + yz + zx = xyz$$

*これで、基本対称式のみ形にできたので、ここから $\textcircled{1}$ を示していきます。 $\textcircled{1}$ の左辺も対称式なので、当然基本対称式のみで表せますよ。

少しめんどうだけど、 $(x-1)(y-1)(z-1)$ を展開していきます。

$$\begin{aligned}
\text{(①の左辺)} &= (x-1)(y-1)(z-1) \\
&= (xy-x-y+1)(z-1) \\
&= xyz-xy-xz+x-yz+y+z-1 \\
&= xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1 \quad \blacktriangleleft \text{これで基本対称式のみで表せた！} \\
&= xy+yz+zx-(xy+yz+zx)+1-1 \quad (\because xy+yz+zx=xyz, xyz=1) \\
&= 0 = \text{(右辺)}
\end{aligned}$$

よって、①は成立する。従って、 x, y, z のうちすくなくともひとつが1である。(証明終)

これで、今回の問題は終わりです。文中でも少し話したけど、これは解法さえ知っていれば簡単な問題だよな。

数学ってこういう問題多いです。ひとつずつ解法を覚えていけば、必ずできるようになります。頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司