

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

三角形 ABC において $\angle A = 60^\circ$ であるとする。

(1) $\sin B + \sin C$ の最大値を求めよ。

(2) $\sin B \sin C$ の最大値を求めよ。

*この問題は動画でも解説しています。

<https://youtu.be/h1CP5zllCeg>

【問題（1）の解説】

三角関数を含んだ最大値・最小値問題です。

(1)、(2) とも B と C と変数が 2 個だよ。変数が 2 個のときの最大値・最小値は 変数を 1 個にしてから解いていくことが多いです。

なお、最大値・最小値問題について自信のない人は以下のページで勉強をしてください。

最大値・最小値のまったくの基本問題から、相加相乗平均や逆手流・逆像法と呼ばれる問題まで解説していますよ。

<https://ouen-math.com/kaisetu/kangae/saidai/>

今回の問題も変数が B と C が含まれています。ただ、三角形の内角の和が 180° であることから、 $60^\circ + B + C = 180^\circ$ つまり $B + C = 120^\circ$ です。この関係式より、1 変数にすることができます。

今回は、 $C = 120^\circ - B$ として、 C を消去して B のみの式にして解いていくことにします。

【問題（１）の解答】

三角形の内角の和が 180° であるので、 $60^\circ + B + C = 180^\circ$ つまり $C = 120^\circ - B$ である。

また、 B, C は三角形の内角より $0^\circ < B < 120^\circ, 0^\circ < C < 120^\circ$ をみたす。

$$\begin{aligned} & \sin B + \sin C \\ &= \sin B + \sin(120^\circ - B) \quad (\because C = 120^\circ - B) \\ &= \sin B + \sin 120^\circ \cos B - \cos 120^\circ \sin B \quad \blacktriangleleft \text{加法定理より} \\ &= \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \\ &= \frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} \sin B + \cos B) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \sin(B + 30^\circ) \quad \blacktriangleleft \text{サインで合成をした！} \\ &= \sqrt{3} \sin(B + 30^\circ) \end{aligned}$$

$0^\circ < B < 120^\circ$ より $30^\circ < B + 30^\circ < 150^\circ$ となる。

よって、 $\sqrt{3} \sin(B + 30^\circ)$ は $B + 30^\circ = 90^\circ$ つまり $B = 60^\circ$ のとき、最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

$B + C = 120^\circ$ より、 $B = C = 60^\circ$ のとき、最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

【問題（２）の解答】

*これも、（１）とまったく同じように解いていくだけですよ。

$$\begin{aligned}
& \sin B \sin C \\
&= \sin B \sin(120^\circ - B) \quad (\because C = 120^\circ - B) \\
&= \sin B \sin 120^\circ \cos B - \cos 120^\circ \sin B \quad \blacktriangleleft \text{加法定理より} \\
&= \sin B \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right) \\
&= \frac{1}{2} \sin^2 B + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B \cos B
\end{aligned}$$

*これを見た瞬間に、解法がすぐに思いつかないとダメですよ。結論から言えば、 $\sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}$, $\sin B \cos B = \frac{\sin 2B}{2}$ として解いていきます。

これが分からない人は、<https://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf> を見てください。詳しく解説をしていますよ。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin 2B}{2} \quad \blacktriangleleft \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}, \sin B \cos B = \frac{\sin 2B}{2} \text{ より!} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2B - \frac{\cos 2B}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} (\sqrt{3} \sin 2B - \cos 2B) + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2 \sin(2B - 30^\circ) + \frac{1}{4} \quad \blacktriangleleft \text{サインで合成をした} \\
&= \frac{1}{2} \sin(2B - 30^\circ) + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$0^\circ < B < 120^\circ$ より $-30^\circ < 2B - 30^\circ < 210^\circ$ となる。

よって、 $\frac{1}{2} \sin(2B - 30^\circ) + \frac{1}{4}$ は $2B - 30^\circ = 90^\circ$ つまり $B = 60^\circ$ のとき、最大値 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ をとる。

$B + C = 120^\circ$ より、 $B = C = 60^\circ$ のとき、最大値 $\frac{3}{4}$ をとる。

今回の問題はどうかだったでしょうか？最大値・最小値問題を理解している人にとっては簡単な問題だったと思います。

ただ、これは一橋大学の過去問（を少し変更したもの）です。一橋大学といった難関大学でもこういった基本的な問題を出してきます。

こういった基本問題を、確実に解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司