

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学 B の「数列」 難易度：「標準」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} = 8(n+2)a_{n+1} - 7(n^2 + 3n + 2)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。

- (1) $b_n = \frac{1}{n!}a_n$ とおくとき、 b_{n+2} を b_{n+1} と b_n を用いて表せ。
- (2) $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくとき、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 a_n の一般項を求めよ。

【(1) の解説付きの解答】

誘導付きの漸化式の問題です。

こういった問題は、実際の大学受験の問題でもよく出題されるので注意しておいてください。

なぜ、こうするか？ということは後から話すことにして、いきなり (1) の問題を解いていきます。

$a_{n+2} = 8(n+2)a_{n+1} - 7(n^2 + 3n + 2)a_n$ で一番右側の $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$ と因数分解します。

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= 8(n+2)a_{n+1} - 7(n+1)(n+2)a_n \\
 \frac{a_{n+2}}{(n+2)!} &= \frac{8(n+2)a_{n+1}}{(n+2)!} - \frac{7(n+1)(n+2)a_n}{(n+2)!} \quad \leftarrow \text{両辺を } (n+2)! \text{ で割った! 【注1】 参照} \\
 &= 8 \cdot \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} - 7 \frac{a_n}{n!} \quad \leftarrow \text{【注2】 参照} \\
 \mathbf{b_{n+2}} &= \mathbf{8b_{n+1} - 7b_n}
 \end{aligned}$$

【注1】について

両辺を $(n+2)!$ で割りました。

この操作をすると、「言われたらわかるけど、こんなの思いつかないよ」なんていう人がいます。

確かに気づきにくいですよ。そこで、「どうして、こうしたのか？」という発想を話していきます。

まず、今回の問題は「 b_{n+2} を b_{n+1}, b_n で表せ」なんだから、当たり前だけど b_{n+2} が必要になるよね。

どうしたら b_{n+2} をつくることができるかな？と考えます。今回の場合、 $b_n = \frac{a_n}{n!}$ なんだから、 b_{n+2} は $b_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{(n+2)!}$ です。

で、今回の与えられて等式を見てみると $a_{n+2} = 8(n+2)a_{n+1} - 7(n+1)(n+2)a_n$ であり、これの両辺を $(n+2)!$ で割ると、左辺が $\frac{a_{n+2}}{(n+2)!}$ となり、 b_{n+2} が出てきてくれるよね。

だから、両辺を $(n+2)!$ で割りました。

こういうふうに説明をすると「確かに b_{n+2} が出てくることはわかりました。でも、今回の問題は b_{n+2} を b_{n+1} と b_n で表せです。

b_{n+1} や b_n が出てくる根拠はないんじゃないですか？何か、たまたまうまくいったけど、

他の似たような問題ではこの考え方では解けないような気がします」と言われることがあります。

回答ですが、「ほとんどの場合、うまくいきますよ」です。当たり前なんですけど、数学って解ける問題が与えられています。今回の問題だったら、 b_{n+2} を b_{n+1} と b_n のみで表せるはずなんです。

今回は、 b_{n+2} を強引に作りました。 b_{n+2} のつくり方としてはこれくらいしかないんです。じゃあ、残りの部分もうまい具合に式変形できて解けるようになってくれています。

そうじゃなかったら解けない問題です。当たり前だけど、解けない問題なんて出題されないよ。安心して解いてください。

たまに、うまくいかない場合もあるかもしれません。そんな場合、「ああ、うまくいかなかったな。ということは、何かほかの解法があるんだな」と考えるようにしてください。

数学ってこういうこと多いです。とりあえず「うまくいきそうな解法で解く。それで解けたらOKだし、解けなかったら、そこからまた別の解法を考えます」。何も解く前からうまくいくかどうかの根拠はないですよ。とりあえず、うまくいきそうなものをしてだけです。

また、今回の場合 b_{n+2} を作りやすかったので b_{n+2} を作りました。問題によっては、とりあえず b_{n+1} や b_n を強引に作る方法で解くこともありますよ。覚えておいてくださいね。

【注2】について

$\frac{8(n+2)a_{n+1}}{(n+2)!} = 8 \cdot \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$ と $\frac{7(n+1)(n+2)a_n}{(n+2)!} = 7 \cdot \frac{a_n}{n!}$ の式変形の説明をします。

こういった階乗の式変形はよく出てくるので覚えておいてくださいね。

文字式では難しいので、簡単な数で説明をしていきます。

*文字が入っていると難しいです。だから、頭が混乱したときは、簡単な具体的な数字で確認したらわかりやすいということが多いですよ。

例えば、 $5!$ は $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ と変形できます。そして、 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ なんだよね。ということは、 $5! = 5 \cdot 4!$ と変形できます。

これより、 $(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1)!$ となることが理解できるよね。

だから、 $\frac{8(n+2)a_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{8\cancel{(n+2)}a_{n+1}}{\cancel{(n+2)} \cdot (n+1)!} = 8 \cdot \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$ と変形できます。

同じように考えて、 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3!$ と変形することもできます。
これより、 $(n+2)! = (n+2)(n+1) \cdot n!$ と変形できることがわかります。

$$\frac{7(n+1)(n+2)a_n}{(n+2)!} = \frac{7\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}\cancel{(n+1)} \cdot n!} = 7 \cdot \frac{a_n}{n!}$$

階乗の式変形は特に数学 III では頻出ですよ。しっかりと理解しておいてくださいね。

【(1) の解説一別解について】

こういった類の問題では、先ほど話したような解法で解かれていることが多いです。上記の場合、まだ発想法としては簡単なものだったので気付けた人も多かったと思います。

とは言っても、問題によっては「こんなの無理だよ」なんて発想法が必要なこともあります。でも、そんな場合でも単純に代入したら解くことができますよ。

どういうことかという、今回の場合 $b_n = \frac{a_n}{n!}$ なんだよね。これより $a_n = n! \cdot b_n$ です。当然、 $a_{n+2} = (n+2)! \cdot b_{n+2}$ 、 $a_{n+1} = (n+1)! \cdot b_{n+1}$ です。

これらを $a_{n+2} = 8(n+2)a_{n+1} - 7(n^2 + 3n + 2)a_n$ に代入すると解くことができますよ。

まあ、少し解答がエレガンスでないですが、確実に解けるのでこちら側の解法でもいい

ですよ。(← 解答がエレガンスでない、なんて数学オタクみたいな書き方してごめんなさいね (笑)。

こちらの解法は発想力が必要ない。その変わり、少し大変になることが多いですよ。)

【(1) の解答一別解について】

$$a_{n+2} = 8(n+2)a_{n+1} - 7(n+1)(n+2)a_n$$

$$(n+2)! \cdot b_{n+2} = 8(n+2) \cdot (n+1)! \cdot b_{n+1} - 7(n+1)(n+2) \cdot n! b_n$$

$$\uparrow a_{n+2} = (n+2)! b_{n+2}, a_{n+1} = (n+1)! b_{n+1}, a_n = n! \cdot b_n \text{ より!}$$

$$b_{n+2} = \frac{8(n+2) \cdot (n+1)!}{(n+2)!} b_{n+1} - \frac{7(n+1)(n+2) \cdot n!}{(n+2)!} b_n \leftarrow \text{両辺を } (n+2)! \text{ で割った!}$$

$$= \frac{8(n+2)!}{(n+2)!} b_{n+1} - \frac{7(n+2)!}{(n+2)!} b_n \leftarrow (n+2) \cdot (n+1)! = (n+2)!, (n+1)(n+2) \cdot n! = (n+2)! \text{ より!}$$

$$= 8b_{n+1} - 7b_n$$

よって、 $b_{n+2} = 8b_{n+1} - 7b_n$

【(2) の解説】

この問題は簡単ですよ。絶対に解けないといけない問題です。

問題に進む前に、少し漸化式の話しをするね。漸化式って「このときはこうする」というパターンがあります。

その解法のパターンをすべて覚えておかないと解けるようにならないですよ。だから、パターンを覚えていない人は覚えてくださいね。

ちなみに漸化式のパターンをすべてまともたプリントを以下で公表しています。漸化式に自信がない人はぜひとも読んでおいてください。

漸化式の解説プリント <https://hmg-gen.com/zenkasiki.pdf>

漸化式はパターンがあります。パターン通りのものは簡単に解けます。また、今回の漸化式のようにパターン以外のものは誘導が与えられていて、誘導にのっていけば解くことができます（今回の問題もそうだったよね）。

パターンで解けなくて、誘導もないときは、帰納法で解くということもあります。まあ、詳しくは漸化式のプリントを見てくださいね。

で、今回の問題は隣接3項間の漸化式と呼ばれるもので、先ほどの漸化式のプリントの問題8にあたるものです。いきなり、解答だけを書いておきます。よくわからないという人は、漸化式のプリントの問題8で勉強した上で解いていってください。

【(2) の解答】

$$(1) \text{ より、} b_{n+2} = 8b_{n+1} - 7b_n \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式 $x^2 = 8x - 7$ を解くと、 $x = 1, 7$ となる。よって、 $\textcircled{1}$ は $b_{n+2} - b_{n+1} = 7(b_{n+1} - b_n)$ と変形できる。

よって、 $c_{n+1} = 7c_n$ となる。

↑ これで数列 $\{c_n\}$ は公比が7の等比数列であることがわかりました。あとは、初項を求めます。

$$b_2 = \frac{a_2}{2!} = \frac{2}{2!} = 1, b_1 = \frac{a_1}{1!} = \frac{0}{1} = 0 \text{ となる。} c_1 = b_2 - b_1 = 1 \text{ となる。}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項1、公比7の等比数列であるので、 $c_n = 7^{n-1}$

【(3) の解答】

* a_n を求めよです。ですが、 $b_n = \frac{a_n}{n!}$ より b_n が求まれば a_n を求めることができます。

$c_n = b_{n+1} - b_n$ となっているので、これは単なる階差数列ですよ。

階差数列についても、先ほどの漸化式のプリントの問題1 (2) で解説しています。階

差数列の公式の証明も載せているので、見ておいてくださいね。

$$b_{n+1} - b_n = 7^{n-1} \text{ より}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7^{k-1} \quad \blacktriangleleft \text{階差数列の公式より！} \\ &= 0 + \frac{7^{n-1} - 1}{7 - 1} \quad \blacktriangleleft \text{【注】を見よ！} \\ &= \frac{7^{n-1} - 1}{6} \end{aligned}$$

$b_n = \frac{7^{n-1} - 1}{6}$ は $n = 1$ のときも成立する。

$$b_n = \frac{a_n}{n!} \text{ より、} \frac{7^{n-1} - 1}{6} = \frac{a_n}{n!}$$

$$\text{よって、} a_n = \frac{7^{n-1} - 1}{6} \cdot n!$$

【注】 について

$\sum_{k=1}^{n-1} 7^{k-1}$ の計算は大丈夫かな？これは、等比数列の和の公式を使っただけですよ。

シグマを具体的に書き出すと、 $\sum_{k=1}^{n-1} 7^{k-1} = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{n-2}$ です。これは、初項 $7^0 = 1$ 、公比 7 の等比数列の初項から第 $n-1$ 項までの和です。

これを等比数列の和の公式 $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ に代入すると、 $\frac{1 \cdot (7^{n-1} - 1)}{7 - 1}$ ですよ。

このあたりの計算はよく出てくるので、何も考えずに解けるようになっておいてくださいね。

今回の問題はどうかだったでしょうか？話したかったこととしては、(1)です。こういう漸化式の誘導問題は実際の大学受験でも頻出です。

(1)で話しましたが、とにかくひとつでも強引に作り出します。今回の場合 b_{n+2} を強引に作るために両辺を $(n+2)!$ で割りました。

こうすると、うまく解けるようになってくれています。

また、こういう発想ができないときは別解のように解いてもらっても大丈夫です。(1)さえできたら、後は簡単な漸化式の問題です。漸化式はパターンをすべて理解しておかないとダメですよ。

漸化式のプリント、かなり詳しく解説しています。ぜひともプリントで勉強をしておいってください。

漸化式のプリント <https://hmg-gen.com/zenkasiki.pdf>

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司