「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学Ｂの「図形と方程式」　　難易度：「標準」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

xy 平面上の点 (x, y) が２つの不等式 $y \geqq x^2 - 1$, $y \leqq 2x + 2$ の表す領域を動くとき、次の問いに答えなさい。

(1) $x^2 + y^2 - 6x + 9$ の最小値を求めなさい。ただし、最小値をとるときの x, y の値を求める必要はない。

(2) $x^2 + y^2 - 6y + 9$ の最大値を求めなさい。ただし、最大値をとるときの x, y の値を求める必要はない。

【解説】

例えば、「$x + y$ の最大値・最小値を求めよ」といった問題のとき $x + y = k$ とでもおいて、直線 $x + y = k$ と領域が共有点をもつときと考えます。

今回もそれと同じように $x^2 + y^2 - 6x + 9 = k$ とおいて解いていき、$x^2 + y^2 - 6x + 9 = k$ は円を表すのでこの円と領域が共有点をもてばいいんだな、と考える人がいます。

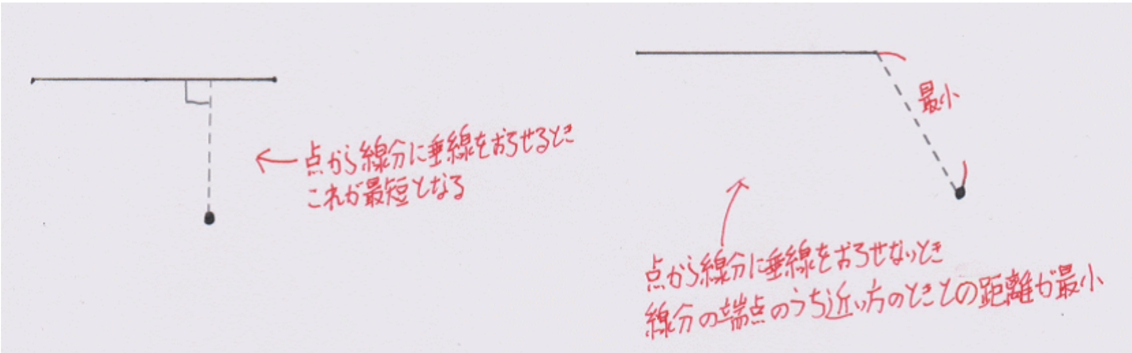
もちろん、それでもよいのですが円と領域が共有点をもつかどうかというのは意外に考えにくいです。そこで、以下のように考えていきます。

$x^2 + y^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 + y^2$ と変形できます。$\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ は２点 $(x, y), (3, 0)$ の距離の２乗だよね（２点間の距離の公式を考えればわかります)。

だから、点 $(3, 0)$ から領域上の点での距離が最大となるところ、最小となるところをさがしていけば、今回求める最大値・最小値も求めることができます。

ここからは、点と線分との最大値・最小値の話をしていきます。

まずは、最小値の方から考えます。

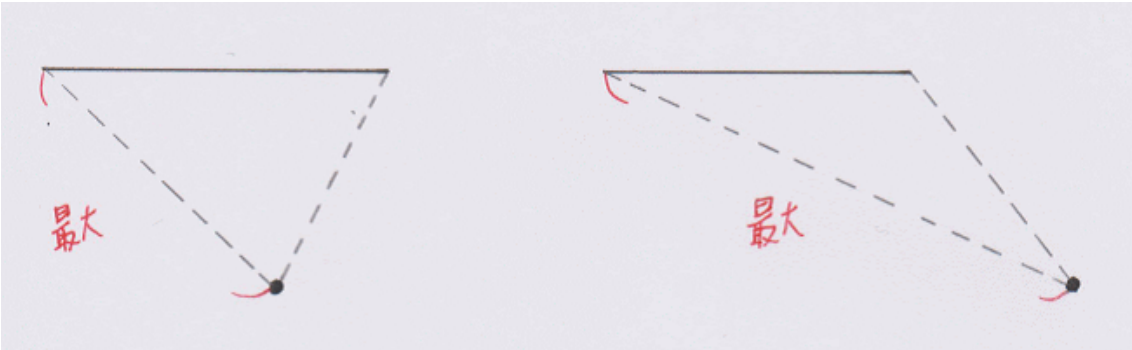


上図を見てもらえば分かると思うけど、定点から線分上の点が最小となるときは２パターンがあります。

まずは、上図の左側のときです。点から線分に垂線をおろせるとき。このとき最小となります。

そして、上図の右側のように点から線分に垂線をおろすことができなとき、線分の端点のうち近い方で最小となります。

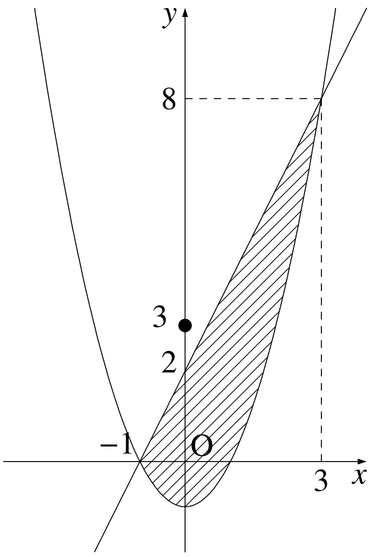
次に最大値を考えます。



定点から線分上の点で最大となるのは、上記のように線分の端点のときです。上図のようなとき、定点から線分までの距離はパッと見でどっちの方が遠いかということはわかります。

その場合、そっちを最大値としてもらってかまいません。でも、どっちで最大値なるか微妙なときあるよね。そんなときは、とりあえず両方の距離を求めてもらって、大きい方を最大としてもらったらいいですよ。

以上のことを踏まえた上で、この問題を考えていくことにするね。まずは、不等式 $y \geqq x^2 - 1$, $y \leqq 2x + 2$ が表す図形を図示してみることにするね。



で、今回の場合、点 $(0, 3)$ から領域上の点までの距離で最大のものと最小のものを考えたらいいんだよね。

まずは、最小の方を考えます。最少は、もう分かるとおもうけど点 $(3, 0)$ から直線 $y = 2x+2$ に垂線をおろしたときが最少となるよね。

で、今回の場合問題に「(x, y) は求めなくてよい」と書かれています。だから、垂線の長さを求めたらいいんだよね。

これは、点と直線との距離で簡単に求めることができますよ。たまに、「点と直線の距離ってどこの長さのことなの？」なんて疑問に思う人もいます。

点と直線の距離の距離は、点から直線に垂線をおろしたときの垂線の長さのことですよ。知らなかった人は覚えておいてくださいね。

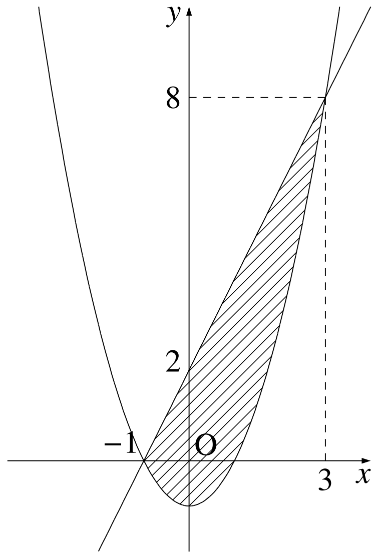
次は最大値です。最大値は、必ず周上の点になるよね。今回の場合、直線上の点か放物線上の点です。

でも、さっき話したように線分の場合最大となる箇所は両端です。今回の領域の場合、線分の両端は放物線上の点でもあります。ということは、今回最大となるのは放物線上の点であるということがいえます。

線分は両端のいずれかということがわかります。ですが、放物線の場合どこにあるかは簡単には判別できません。ですから、放物線上の点を $(t, t^2 - 1)$ とでもおいて解いていくことにします。

【解答】

２つの不等式 $y \geqq x^2 - 1$, $y \leqq 2x + 2$ の表す領域を図示すると以下のようになる。



（１）

$x^2+y^2-6y+9=x^2+(y-3)^2$ である。これは２点 $(0,3),(x,y)$ 間の距離の２乗となる。

点 $(0,3)$ との距離が最小となる領域内の点は、点 $(0,3)$ から直線 $y=2x+2$ におろした垂線の足である。

このときの２点間の距離は、点と直線の公式で求めることができる。

直線 $y=2x+2 \iff 2x-y+2=0$ と点 $(0,3)$ の距離は、点と直線の距離の公式より

$\dfrac{|2\cdot 0-3+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$ ◀ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{a^2+b^2}$ の公式より

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

以上より、最小値は $\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

⇑今回は、距離の２乗なので $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を２乗した、$\dfrac{1}{5}$ が答えですよ。

（２）

点 $(0,3)$ との距離がが最大となる領域内の点は、放物線 $y=x^2-1$ 上の点である。
⇑どこまで説明なしで書いていいのか少し分かりにくいです。ですが、放物線上の点であることは、説明なしでいきなり書いてもらった大丈夫です。

放物線上の点 (t,t^2-1) $(0 \leqq t \leqq 3)$ 間の距離を L とする。

$$L^2=(t-0)^2+\{(t^2-1)-3\}^2$$ ◀ 2 点間の距離の公式より

$$=t^2+(t^2-4)^2$$

$$=t^4-7t^2+16$$

＊与式は t^2 のみの式なので、$t^2=u$ とでも置換して解いていきます。ただ、置き換えたら範囲を考えないといけません。$-1 \leqq t \leqq 3$ のとき $0 \leqq t^2 \leqq 9$ つまり $0 \leqq u \leqq 9$ となるよね。

ここで $t^2=u$ とする。$-1 \leqq t \leqq 3$ より $0 \leqq u \leqq 9$ となる。

$$L^2=u^2-7u+16$$

$$=\left(u-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+16$$

＊今回は、最大値は頂点の座標がなくても求めることができます。上記の $-\frac{49}{4}+16$ は計算してもいいけど、ここでとめておいてもいいと思いますよ。

$0 \leqq u \leqq 9$ より、L^2 は $u=9$ のとき最大となる。

$u=9$ のとき、$L^2=9^2-7\cdot9+16=34$

よって、最大値は **34** である。

今回の問題はどうでしたか？領域がらみの最大値・最小値問題です。

$x+y$ のように直線はやったことがある人が多いと思いますが、こういうふうに点からの距離という問題は知らない人や苦手にしている人が多いいです。

でも、やってもらって分かったと思うけど、そこまで難しくないよね。実際の大学受験でもよく出てきます。しっかりと解けるようになっておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司