

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅱの「指数対数」 難易度：「基礎」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

方程式 $2(4^x + 4^{-x}) - 9(2^x + 2^{-x}) + 14 = 0$ を解け。

【解説】

指数の方程式の問題です。こういったタイプの問題はよく出てくるから、解法を覚えておいてくださいね。

こういう方程式は、文字の置き換えを使って解いていくことが多いです。 $2(4^x + 4^{-x}) - 9(2^x + 2^{-x}) + 14 = 0$ は、このままでは解くことができないよね。

でも、適当な置き換えをすることによってこの方程式は単なる 2 次方程式になってくれます。2 次方程式だったら中学生でも解けるよね。

今回は、指数の問題です。でも、指数だけでなく、対数や三角関数、また他の単元でも最初の置き換えさえ気づけばあとは単なる 2 次方程式や 2 次関数となるものが非常に多いです。

先ほど「最初の置き換えに気づけば」と書きました。でも、その置き換えの仕方はある程度ルールがあって「このときはこうする！」ということが一瞬で分かるようになっておかないといけませんよ。

たまに、難しく感じる人もいるみたいですが、なんてことない。少しやれば誰でもできるようになりますよ。頑張ってくださいね。

では、今回の問題に戻ります。今回の問題は、 $2^x + 2^{-x} = t$ と置換すればうまくいきます。

方程式で、 x を含んだ式は $2^x + 2^{-x}$ と $4^x + 4^{-x}$ の2つです。後から記しますが、 $4^x + 4^{-x}$ も t のみを使って表すことができるので、これでうまくいきます。

一応、置換の仕方をまとめておきます。

置換の仕方

与えられて式が、 $a^x + a^{-x}$ と $(a^2)^x + (a^2)^{-x}$ のみで表されているとき、 $a^x + a^{-x} = t$ と置換すればうまくいく！

上記のタイプでよく出てくるのは、 $a = 2$ と $a = 3$ のときですよ。 $a = 2$ のとき $(a^2)^x + (a^2)^{-x} = 4^x + 4^{-x}$ です。だから、 $2^x + 2^{-x}$ と $4^x + 4^{-x}$ のみの式のとき $2^x + 2^{-x} = t$ と置換すればうまくいきます。

$a = 3$ のときは、 $3^x + 3^{-x}$ と $9^x + 9^{-x}$ のみです。このとき $3^x + 3^{-x} = t$ と置換すればうまくいきます。とりあえず、このくらい覚えておけば大丈夫ですよ。

で、 $2^x + 2^{-x} = t$ と置換したとき $4^x + 4^{-x}$ も t を使って表すことができます。これは、対称式の変形 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ を使えば、大丈夫です。

$$\begin{aligned}
& 4^x + 4^{-x} \\
&= (2^x)^2 + (2^{-x})^2 \\
&= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \leftarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{ で、 } a = 2^x, b = 2^{-x} \text{ のとき！} \\
&= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \leftarrow 2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = 1 \text{ より！} \\
&= t^2 - 2 \leftarrow \text{これで、 } 4^x + 4^{-x} \text{ を } t \text{ のみで表すことができた！}
\end{aligned}$$

あと、置換したときって置換した文字の値の範囲を考慮しておかないとダメだったんだよね。

今回の場合、 $t = 2^x + 2^{-x}$ と置換しました。 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ より、相加相乗平均を使って t の値の範囲を求めることができます。

$t = 2^x + \frac{1}{2^x}$ って変形できるよね。こういうふうに、分数で分母に変数があるとき、値の範囲を求めたり、最大値・最小値を求めたりするときは相加相乗平均を使うことが多いですよ。

相加相乗平均は本当によく出てきます。分母に変数がある時点で「相加相乗平均を使うのかな？」と気づけるようになってくださいね。

相加相乗平均を忘れてる人もいると思うので、一応まとめておきます。

相加相乗平均

$a > 0, b > 0$ のとき、 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ が成立する。等号成立は、 $a = b$ のとき

$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ となるので、 $t \geq 2$ という範囲が出てきますよ。それでは、解答に移ります。

【解答】

$2^x + 2^{-x} = t$ とする。 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ である。相加相乗平均より $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$

$$\begin{aligned} & 4^x + 4^{-x} \\ &= (2^x)^2 + (2^{-x})^2 \\ &= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \leftarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{ で、 } a = 2^x, b = 2^{-x} \text{ のとき！} \\ &= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \leftarrow 2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = 1 \text{ より！} \\ &= t^2 - 2 \leftarrow \text{これで、 } 4^x + 4^{-x} \text{ を } t \text{ のみで表すことができた！} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(4^x + 4^{-x}) - 9(2^x + 2^{-x}) + 14 &= 0 \\ 2(t^2 - 2) - 9t + 14 &= 0 \quad (\because 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2, 2^x + 2^{-x} = t) \\ 2t^2 - 9t + 10 &= 0 \\ (t - 2)(2t - 5) &= 0 \\ t &= 2, \frac{5}{2} \end{aligned}$$

*これで、 t の値が求まりました。ここから、 $t = 2^x + 2^{-x}$ に代入して、 x の値を求めていきます。 $t \geq 2$ という範囲がありました。 $t = 2, \frac{5}{2}$ は両方とも $t \geq 2$ を満たすので、両方とも OK です。

$t = 2$ のとき

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{-x} &= 2 \\ (2^x)^2 + 1 &= 2 \cdot 2^x \leftarrow \text{両辺に } 2^x \text{ をかけた！} \\ (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 &= 0 \\ (2^x - 1)^2 &= 0 \\ 2^x &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$t = \frac{5}{2}$ のとき

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$2(2^x)^2 + 2 = 5 \cdot 2^x \quad \leftarrow \text{両辺に } 2 \cdot 2^x \text{ をかけた!}$$

$$2(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$(2^x - 2)(2 \cdot 2^x - 1) = 0$$

$$2^x = 2, \frac{1}{2}$$

$$x = 1, -1$$

以上より、方程式の解は $x = -1, 0, 1$ である。

上記の変形は大丈夫かな？まず、 $2(2^x)^2 + 2 = 5 \cdot 2^x$ などはこのまま解いていきました。ただ、見にくければ $2^x = u$ とでも置換した方が分かりやすいですよ。

慣れてきたら、置き換えはメンドウなので置き換えずに解いていきます。でも、最初のうちは置き換えてくださいね。

あと、 $2^x = 1$ のとき $x = 0$ もすぐに解けるようになっておいてくださいね。 $a^0 = 1$ ですよ。このあたりは、当たり前に見えるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司