「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

n を自然数とし $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を正の実数とする。このとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

【解説】

どうやって示すのかな？と考えるんだけど、とりあえず自然数 n を含んでいるので、帰納法で証明をしていきます (自然数 n を含んだ証明のときは、帰納法を使って示すことが多いです)。

帰納法なので、$n = 1$ のとき成立。$n = k$ のとき成立すると仮定して、$n = k + 1$ のとき成立すると示していきます。

$n = k$ のとき

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right) \geqq k^2 \cdots (*)$$

$(*)$ を使って $n = k + 1$ のとき成立する式の

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \geqq (k + 1)^2$$ を証明します。

上記の式が言えたら証明終了になるんだけど、次のように変形をしていきます。

(左辺)

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\right\}\left\{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{a_{k+1}}\right\}$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$ ◀ 分配法則を使って展開をした

上記は $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$ を含んだ式にするように強引に式変形をしました。

なぜ、このように式変形するのか思いつかないという人も多いと思うけど、帰納法は $n=k$ のとき成り立つと仮定して $n=k+1$ のとき成立するということを示すんだよね。

これは、要するに$n=k$ のとき成り立つ式を使って、$n=k+1$ のときの式を証明していくっていうことです。

この問題では $n=k$ のときの式は $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$ なんだから、$n=k+1$ のときなんとかこの式を使うには？と考えて上記のように変形しました。現段階では、うまくいくかどうかはよくわかんないけど、とりあえずこのように変形してみました。

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

上記の式で $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$ の部分は $n=k+1$ のときの条件式を使って考えられるとして、

残りの

$\dfrac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}\right)+1$ の部分を考えていかないとダメだよね。

そこでどうするのかな？と考えるんだけど。1 は後で使うとして、残りの部分を展開をしてみます。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\\&=\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_2}{a_{k+1}}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{a_1}+\frac{a_{k+1}}{a_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)\end{aligned}$$

ここから考えないといけないんだけど、大学受験生ならここからの式変形はすぐに思いついて欲しいですが、ここからは実は相加相乗平均がつかえます。

＊今回でもそうだけど、足し算で分母に文字がきているときは相加相乗平均を使うことが多いですよ。こういう式を見たら、「相加相乗平均かな？」と考えられるようになっておいてください。

左のカッコの 1 番左の項と右のカッコの 1 番左の項を足し合わせてみます。

$$\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{a_1}}{\cancel{a_{k+1}}}\cdot\frac{\cancel{a_{k+1}}}{\cancel{a_1}}}=2$$

次に 2 番目の項同士を足し合わせてみます。

$$\frac{a_2}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_2}\geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_{k+1}}}\cdot\frac{\cancel{a_{k+1}}}{\cancel{a_2}}}=2$$

こういうふうに左側のカッコの i 番目の分数と右側の項の i 番目の分数をペアにすると全て相加相乗平均を使うことができます。最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、分数で足し算で表されていて互いに掛け合わせると変数が消えるときは相加相乗平均を使えるのでは？と考えるようにしてください。以上のことを踏まえて解答に進

みます。

【解答】

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2 \cdots (*)$ とする。

以下、$(*)$ が成立することを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

$(\text{左辺}) = a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1,\quad (\text{右辺}) = 1^2 = 1$

よって、$(*)$ は成立。

(ii) $n=k$ のとき

$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right) \geqq k^2 \cdots ①$ が成立すると仮定する。

$$
\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\
=&\left\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\right\}\left\{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{a_{k+1}}\right\}\\
=&(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\\
&=\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_2}{a_{k+1}}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{a_1}+\frac{a_{k+1}}{a_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_2}\right) + \cdots \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$$
$$\geqq 2\sqrt{\frac{a_1}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_1}} + 2\sqrt{\frac{a_2}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_2}} + \cdots + 2\sqrt{\frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k}}\ (\because a_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, k+1))$$
$$= 2k \cdots ②$$

＊上記は、相加相乗平均を k 個しました。それぞれ 2 以上なので、全部合わせて $2k$ 以上ということですよ。

よって

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right)$$
$$+ \frac{1}{a_{k+1}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right) + 1$$
$$\geqq k^2 + 2k + 1\ \ (\because\ ①②)$$
$$= (k+1)^2$$

よって、$n = k + 1$ のときも成立する。以上より、全ての自然数において $(*)$ は成立する。
（証明終）

これで終了です。難しかったよね。でも、数学的帰納法は実際の大学受験でも頻出ですよ。しっかりと解けるようになっておいてください。

この問題には別解があります。シュワルツの不等式を使って示すこともできます。シュワルツの不等式を使うときは、シュワルツの不等式を証明してから問題を解いていくようにしてください。

シュワルツの不等式

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geqq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

シュワルツの不等式の証明は、知らなかったら思いつけないと思います。「こんな証明法を使うんだな」と思ってもらえばよいですよ。

それでは、シュワルツの不等式の証明を含んだ別解に進みます。

【別解】

不等式 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geqq (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \cdots ①$ が成立することを示す。

＊以下を見てもらえばわかります。シュワルツの不等式は判別式を使って示していきます。ただ、判別式を使うには２次方程式でないといけません。$x_1^2+x_2+\cdots+x_n^2=0$ つまり $x_1=x_2=\cdots=x_n^2=0$ のとき、２次方程式とならないので場合分けが必要です。

(i) $x_1=x_2=\cdots=x_n^2=0$ のとき

このとき ① の両辺とも 0 になるので、① が成立する。

(ii) (i) 以外のとき

⇑ このとき、$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \neq 0$ より、判別式を使えます。

任意の実数 t に対して

$(x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+\cdots+(x_nt-y_n)^2 \geqq 0$ が成立する。

⇑ ２乗したんだから全てが０以上。０以上を足し合わせても０以上

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+\cdots+(x_nt-y_n)^2 \\
&= x_1^2t^2-2x_1y_1t+y_1^2+x_2^2t^2-2x_2y_2t+y_2^2+\cdots+x_n^2-2x_ny_n+y_n^2 \blacktriangleleft \text{単に展開した} \\
&= (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\,t+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2 \blacktriangleleft t\text{で整理した}
\end{aligned}
$$

＊ここから少し考えるんだけど $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,t^2-2\,(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\,t+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ は下に凸な２次関数。これが任意の t で０以上でないとダメなんだから、判別式を D とすると、$D \leqq 0$ を満たせばよいことになります。

$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\,t+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$ 判別式を D とする。$D \leqq 0$ である

$$D/4=(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \leqq 0$$

$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\,(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geqq \,(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$

以上より、不等式 $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\,(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geqq \,(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \cdots$①
が成立する。

＊これでシュワルツの不等式が示せました。ただ、こんなのその場で思いつくの無理ですよ。解法を覚えてしまうしかありません。頑張って覚えてくださいね。

$a_1 > 0\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ より、① を $x_i = \sqrt{a_i},\ y_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_i}}$ で置き換えると

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq \left(\sqrt{\cancel{a_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{a_1}}} + \sqrt{\cancel{a_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{a_1}}} + \cdots + \sqrt{\cancel{a_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{a_1}}}\right)^2$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq (1 + 1 + \cdots + 1)^2$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2 \quad \text{(証明終)}$$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司