「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 III の積分　　難易度：基礎

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

定積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$ を計算せよ。ただし、e は自然対数の底である。

【解説】

数学 III の定積分の問題です。数学 II と違って数学 III の定積分の問題は、いろいろなバリエーションがあります。

よく「定積分が難しいんです」という人がいます。でも、これって考える以前に暗記しておかないと絶対に解けないですよ。どんなに頭のいい人でも、その場で思いつくというのは無理があります。

だから、覚えていってくださいね。それだけで、必ずできるようになりますよ。

今回の問題は、以下のことを思い出せるようにしておいてください。

積分の解法

定積分・不定積分で被積分関数（積分をされる関数のこと、インテグラルの中身の関数です）が積の形になっているとき、

$$\boldsymbol{\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C} \quad (C\text{ は積分定数})$$

の公式を使えるかどうか、まず確認をする。

上記の説明に進む前に、まずなぜ「$\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$」が成立するか？ということを話しておくね。

これって微分の合成関数の微分さえ理解していれば十分ですよ。$\{f(x)\}^n$ を微分したら、$nf(x)^{n-1}\cdot f'(x)$ になるんじゃなかった？忘れていた人は覚えておいてね。

合成関数の微分といいます。$(x^n)' = nx^{n-1}$ なんだよね。で、x のところが $f(x)$ に変わったとき、$\{f(x)^n\}' = n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$ と x のところが $f(x)$ になって、後は $f'(x)$ がついてくると覚えておいてもらったらいいですよ。

これって、$\{f(x)^n\}'$ だけで成立する式じゃないよ。$\{\sin f(x)\}' = \cos f(x)\cdot f'(x)$ だし、$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$ となりますよ。他の微分もすべてそうです。x のところが $f(x)$ になった場合、x を $f(x)$ で最後に $f'(x)$ がつくと思っておいてもらったら大丈夫ですよ。

念のため、$\boldsymbol{(\{f(x)\}^n)' = \{f(x)\}^n\cdot f'(x)}$ になることを説明しておくことにするね。

とりあえず $y = \{f(x)\}^n$ とでもします。今回求めたいものは、y を x で微分をした $\dfrac{dy}{dx}$ です。

$\{f(x)\}^n$ の微分は（これまでの知識だったら）できないけど、もし仮に $f(x) = t$ とすると、$y = \{f(x)\}^n = t^n$ ってなるよね。これだったら、簡単に微分をすることができます。

t^n を微分すると、nt^{n-1} です。

ただ、気を付けないといけないことは nt^{n-1} は t^n を t で微分したものです。今回の問題では、$\{f(x)\}^n$ つまり t^n を x で微分しないといけないんだから、t で微分と x で微分ちょっと違うよね。

ここで、以下の微分の公式が必用になってきます。

合成関数の微分の公式

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}}$$

上記の公式、微分は分数と扱ってはホントはダメなんだけど、もし分数として扱ってよいのなら、$\dfrac{dy}{\cancel{dt}} \dfrac{\cancel{dt}}{dx}$ と約分できて公式が成立しているということを確認することができるよね。

【注】 微分は決して分数ではないので、上記のように約分することはできないですよ。だから、約分をするのはダメです。当然、斜線なんていれたらダメですよ。ただ、こういうふうに覚えたら公式として覚えやすいですよ、ということです。

高校数学の範囲では上記の微分の公式を証明することはできません。だから、定義として扱ってください。丸暗記出しか、解けないですよ、ということです。

お恥ずかしい話ですが、大学で数学を専攻した訳ではないので、僕もしっかりと理解出来ている訳ではありません。ただ、大学受験レベルではこの程度で大丈夫です。深く理解することはそもそも無理です。高校数学の範囲では、覚えるしか方法はないですよ。

では、公式の証明にもどります。

$y = \{f(x)\}^n = t^n$ の両辺を t で微分します。$\dfrac{dy}{dt} = nt^{n-1}$ です。
また、$t = f(x)$ より、$\dfrac{dy}{dt} = n\{f(x)\}^{n-1}$ です。

$t = f(x)$ の両辺を x で微分すると、$\dfrac{dt}{dx} = f'(x)$ です。

合成関数の微分の公式にあてはめると $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$ です。これで、微分の公式を導くことができました。

それでは、積分の公式 $\boldsymbol{\int f'(x)\{f(x)\}^n \, dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C}$ を確認していきます。

微分と積分の関係から、上記の公式は右辺の $\dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}$ を微分したら、左辺の被積分関数の $f'(x)\{f(x)\}^{n-1}$ となっていたら、公式が成立するということが確認できるんだよね。

右辺の、$\dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}$ を合成関数の微分の公式を使って微分していくことにします。公式通り、最後に $f'(x)$ が成立することを忘れないようにしてください。

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}\right)' \\
=&\frac{1}{n+1} \cdot (n+1)\{f(x)\}^n \cdot f'(x) \\
=&\{f(x)\}^n \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

これより、$\boldsymbol{\int f'(x)\{f(x)\}^n \, dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C}$ が成立しているということを確認できました。

これを踏まえて今回の問題に進んでいくね。今回の問題は、$\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$ です。被積分関数は、$\dfrac{\sqrt{1+\log x}}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\log x}$ と変形することができます。被積分関数を、ちょっと強引に積の形に変形したけど、こういうふうに変形することもあるので覚えておいてくださいね。

それで、被積分関数が積のときは $\boldsymbol{\int f'(x)\{f(x)\}^n \, dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C}$ の公式を使える形になっているか確認をする、の鉄則を思い出します。

$1+\log x = f(x)$ とでもします。$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ だよね。だから、被積分関数の $\dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\log x} = \{f(x)\}^{\frac{1}{2}} \cdot f'(x)$ の形になっているよね。だから、今回は公式を使って解ける形になっています。

面積や体積を求めるときには、定積分を使って求めていくよね。こういったときは、特に被積分関数が積のときは、この公式を使えることが多いです。

ついつい、部分積分や置換積分をしたくなりますが、それよりもまずこの公式を使って解けるかどうか考えるようにしておいてくださいね。

今回の問題もそうだけど、「被積分関数が積のときは、公式を使うことが多い」という規則を頭にいれておかないと、その場ではなかなか気づけないよね。意外に重要なので、覚えておいてくださいね。

【解答】

$\displaystyle \int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\, dx$

$\displaystyle = \int_1^e (1+\log x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+\log x)'\, dx$ ◀ $\displaystyle \int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)\, dx$ の形にして公式を使える形にした！

$\displaystyle = \left[\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^e$ ◀ $\displaystyle \int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式より。$n = \dfrac{1}{2}, f(x) = 1+\log x$ のとき

$\displaystyle = \frac{2}{3}(1+\log e)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+\log 1)^{\frac{3}{2}}$

$\displaystyle = \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}-2}{3}}$

【注】

今回勉強をした、$\displaystyle \int f'(x)\{f(x)\}^n\, dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ は大学受験では使ってもらっても（おそらく）大丈夫です。

おそらくと言ったのは、大学によって採点基準が違うからです。基本的に大学受験は「教科書に載っている内容だけで解け」と言われています。

厳密に言えば、この公式は教科書には載っていません。ただ、被積分関数を微分したら簡単に確認できる公式なので、使ってもらって大丈夫です。もし、不安したら $f(x)=t$ と置換して解いてください。

そうすると、解けますよ。多くの学校でも最初はこの置換で解いていて、そしてある程度時間が経てば置換せずに公式として解くところが多いと思います。

置換しても、結局はまったく同じことをしているだけ、と思えると思います。ただ、念のため別解として載せておきます。

【別解】

$1+\log x=t$ とする。

$1+\log x=t$ の両辺を x で微分する。$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$。よって、$dt=\dfrac{1}{x}\,dx$

x	$1\to e$
t	$1\to 2$

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e \sqrt{1+\log x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$ ◀ 見やすいように変形しただけです。慣れればこの部分は不要！

$$=\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$$

⇑ 積分区間を変更した。あとは、$\dfrac{1}{x}\,dx=dt$ より！

$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}-2}{3}}$$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司