「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ を計算せよ。ただし、n は０以上の整数。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx$ を計算せよ。

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$ を計算せよ。

【解説】

積分漸化式の問題です。今回の問題は、積分漸化式の中では一番有名な問題のひとつかな？と思います。熱心に勉強している人なら、一度は見たことのある問題かもしれません。

と言っても、まったく簡単ではないと思いますよ。受験生時代、僕は頭が悪かったということがあるかもしれませんが、理解できるまで何度も何度も解きなおしたことを覚えています。

簡単にすぐに理解できる人もいると思いますが、すぐに理解できなくても僕のように繰り返しやっていたら確実にできるようになります。理解できるまで、何度も何度も繰り返してください。

それでは、問題に進みたいと思います。まずは、次の事柄を覚えておいてください。

積分漸化式の解法

積分漸化式の問題では、最初に部分積分をすることが多い！

(注) 積分漸化式には有名なものが何問かありますが、そのほとんどは最初に部分積分をします。部分積分しないもので、記憶にあるのは $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ くらいでしょうか。他にもあるかもしれませんが、積分漸化式を見たらまず部分積分かな？と思えるようにしてください。

で、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ を部分積分をしないといけないんだけど、部分積分をするには当然ですけど、積の形になっていないといけません。そこで、$\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$ と強引に積の形にしてから解いていくことにします。
(注) こういった式変形をすると、「そんなの思いつかないよ」という人がたまにいます。確かにそうですよ。こんなの知っていないと思いつきようがありません。

数学全般的に言えることですけど、解法を知っておかないとどうしようもない問題と言うものも存在します。知らなければいくら考えたムダです。ですから、普段勉強をするときもひとつずつ丁寧に解法を覚えていくようにしてください。

$\displaystyle a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とでもして、部分積分をすることにします。

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \cdot \sin^{n-1} x\,dx \\
&= \Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1)\ \sin^{n-2} x \cdot (\sin x)'\,dx \quad \blacktriangleleft \text{部分積分をした！}
\end{aligned}$$

で、ここからなんだけど上記の式の左側 $\Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$ は、どうなるか分かるかな？
$-\cos x \cdot \sin^{n-1} x$ の x に $x = 0$ や $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入するんだけど、まず $x = 0$ を代入すると $\sin x = 0$ となります。次に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると $\cos x = 0$ となります。

このことより、$\Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ となります。

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx \\
&= \Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cdot (\sin x)' \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx
\end{aligned}
$$

とりあえず、積分漸化式は最初に部分積分をするという鉄則に従ってここまで式変形をしてきたけど、ここからどうするか分かるかな？積分漸化式っていうくらいだから、漸化式ができるはずだよね (← そうじゃないと問題が解けない！) ということは、ここから n と a_n に関する式ができるはず。

この考えを頭に入れて考えると、$a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ ってよく見ると $\sin x$ のみの式で、$\cos x$ は含んでいないよね。そこで、$(n-1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx$ は $\sin x$ と $\cos x$ を含んだ式なので、とりあえず $\cos x$ を消去して $\sin x$ のみの式にしてみます。

$$
\begin{aligned}
a_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx \quad \blacktriangleleft \ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ より。これで } \sin x \text{ のみの式にした！} \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx
\end{aligned}
$$

とりあえず、部分積分をして sin のみの式にすることによってここまできました。で、ここからなんですけど、ちょっと気付きにくい人もいるかもしれないけど、$a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ なんだから、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx = a_{n-2}$ だよね。このことより次の関係式が成立します。

$a_n = (n-1)\, a_{n-2} - (n-1)\, a_n$ これを整理していきます。

$$a_n = (n-1)\,a_{n-2} - n\,a_n + a_n$$
$$n\,a_n = (n-1)\,a_{n-2}$$
$$a_n = \frac{n-1}{n}\,a_{n-2}$$

＊ a_n の n の部分は 0 以上でないといけません。a_{n-2} が存在するには、$n-2 \geqq 0$ つまり $n \geqq 2$ である必要があります。だから、$n = 0, 1$ のときと $n \geqq 2$ のときとで場合分けをして解いていきます。

上記で、いよいよ漸化式を作ることができました。**積分漸化式で、部分積分をするのはこういういうふうに漸化式を作ることが目的です。**ここからは、積分は関係なく純粋な漸化式の問題です。といっても数学 B で勉強した基本的な漸化式よりもややこしいと思います。数学 III には、こういった漸化式が頻出ですので、しっかりと解けるようになっておいてください。

で、ここからなんですけど

$a_n = \dfrac{n-1}{n}\,a_{n-2}$ の n を $n-2$ に置き換えると

$$a_{n-2} = \frac{n-2-1}{n-2}\,a_{n-4} \quad ◀\ a_n = \frac{n-1}{n}\,a_{n-2} \text{ の } n \text{ に } n-2 \text{ を代入した}$$
$$= \frac{n-3}{n-2}\,a_{n-4}$$

これより、

$$a_n = \frac{n-1}{n}\,a_{n-2}$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2}\,a_{n-4}$$

あとは、これを繰り返していくだけです。ただ、今回は a_{n-2} の次が a_{n-4} というように 2 個ずつ小さくなっているので、注意が必要です。

$n \geqq 0$ とすると、n が偶数のときは 2 個ずつ小さいくなるので、一番小さいものは a_0 です。ですが、n が奇数のときは 2 個ずつ小さくなるので、一番小さいものは a_1 です。このように、偶数、奇数で違ってくるので当然場合分けが必要です。まずは、n が偶数のときから考えていきます。

n が偶数のとき、漸化式をどんどんと変形していくと次のようになります。

$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{\bigcirc}{\triangle} a_0$ この $\bigcirc$ と $\triangle$ の中にはどんな数字がくるか分かるかな？ここが、結構ポイントです。漸化式として重要なところなので、ぜひとも理解しておいてください。

まずは、$\bigcirc$ の方から考えていくことにします。

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$
$$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} a_{n-4}$$
$$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} a_{n-6}$$

上記の赤字のところと青字のところを見比べて欲しいんだけど、赤字のところはいつも青字のところよりも 1 だけ大きな数字になっていない?これより、$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{\bigcirc}{\triangle} a_0$ の $\bigcirc$ の部分には 0 より 1 だけ大きい、1 がきます。

これで、$\bigcirc$ が分かったので、次に $\triangle$ の方です。これも関係を見ていたら分かるよね。分母は分子に比べていつも 1 だけ大きいので、分子の $\bigcirc$ が 1 のとき、分母の $\triangle$ は 2 になります。

以上のことより、n が偶数のとき $a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} a_0$ になります。ちなみに、これがほとんど答えです。あとは、a_0 を計算するだけです。

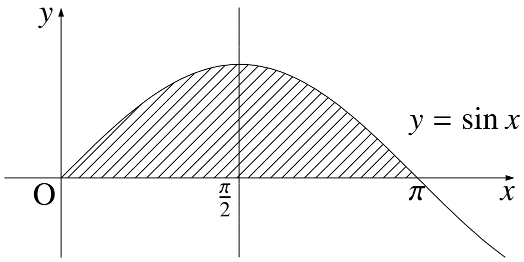
$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \Big[x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ です。

これで、偶数のときが終わったので、次に奇数のときに進みたいと思います。奇数のときも、偶数のときと同じように考えていったらいいだけです。

奇数のときは、a_0 でなく a_1 まで、進むので

$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} a_1$ となります。

ちなみに $a_1 = 1$ です。これは、計算をしてもらってもいいのですが、以下の事柄は暗記しておいた方がいいと思いますよ。



上手の斜線部は、$y = \sin x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は計算すると明らかですが、２になります。これより $a_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ は斜線部の半分の面積を表すので当然 1 になります。

これは、計算でごくごく簡単に出すことができますが、よく出てくるので覚えてしまった方がいいです。

ちなみに今回の問題ですが、問題によっては「$\sin^0 x = 1$ とする」と書かれていることがあります。

０乗は 1 になるから当たり前なのでは？と思いますよ。でも、0^0 は定義されないんです。

で、今回の問題の場合、積分区間で考えると $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なんだよね。$x = 0$ のとき $\sin x = 0$ となるので 0^0 が出てくるので計算できません。

それを防ぐために問題で $\sin^0 = 1$ と書かれていることがあります。ただ、高校数学は曖昧なこともあって、与えられていないときもあります。

そんな場合、何も書かずに $\sin^0 = 1$ と扱ってもらってよいと思いますよ。高校数学は、そもそも数学的に言っても曖昧な箇所が多いです。

すべてをちゃんと説明しても高校生には難しすぎるという理由で、高校生にも理解できるようにしています。

そのため、曖昧な説明であったり、場合によっては数学的に間違っている部分もあります。ただ、高校生が理解するのは無理だから、大学に入ってから勉強をしてくださいね、ということです。細かい部分は、「まあ、こんなものだ」と納得して前に進むようにしてください。

それでは、解答に進みたいと思います。

【(１) の解答】

$a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ とする。

$n \geqq 2$ のとき

$\Uparrow$ a_{n-2} が出てくるので、$n-2 \geqq 0$ つまり $n \geqq 2$ が必要です。

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \cdot \sin^{n-1} x\, dx \\
&= \Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1)\ \sin^{n-2} x \cdot (\sin x)'\, dx \blacktriangleleft \text{部分積分をした！} \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x)\, dx \blacktriangleleft \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ より。これで } \sin x \text{ のみの式にした！} \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx
\end{aligned}$$

＊ここで、右辺の $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\ dx = a_{n-2}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\ dx = a_n$ を代入して解いていきます。

$$a_n = (n-1)\,a_{n-2} - (n-1)\,a_n$$
$$n\,a_n = (n-1)\,a_{n-2}$$
$$a_n = \frac{n-1}{n}\,a_{n-2}$$
$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\,a_{n-4}$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\,a_0 & (n\text{ が 2 以上偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\,a_1 & (n\text{ が 2 以上奇数のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_1 = 1$ を考え、以下のようになる

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が 2 以上の偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1 & (n\text{ が 2 以上奇数のとき}) \end{cases}$$

以上より、

$n=0$ のとき $a_n = \frac{\pi}{2}$、$n=1$ のとき $a_n = 1$

n が 2 以上の偶数のとき $a_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

n が 2 以上の奇数のとき $a_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$

【(２) の解答】

(1) を利用して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx$$
$$= \frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$
$$= \mathbf{\frac{128}{315}}$$ ◀ これが答え

【(３) の解答】

(1) を利用して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$$

$$= \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{63}{512}\pi}$$ ◀ これが答え

今回の積分漸化式ですが、本当は暗記して欲しいくらいの問題です。そのくらいよく出題されます。

今回とは違い (1) なしに、いきなり $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$ を求めよという問題もでてきます (別に６乗とは限りませんよ)。このときに、証明なしに今回の公式を使うのは少しまずいかもしれません。ですから、実際の答案では今回のように証明をしてから解くようにしたらいいと思います。

慣れるまでは時間がかかるかもしれませんが、こんなの慣れてきたら３分もかかりません。そのくらい、短時間で導けるようになるまで繰り返しておいて欲しいです。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法

https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司