「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

「区分求積について」

こんにちは、河見賢司です。今回のテーマは、「区分求積について」です。

区分求積は、多くの高校生が苦手にしていますが、実はワンパターン解法が存在します。今回は、区分求積のワンパターン解法を解説していきたいと思います。

今回のプリントさえ理解できていたら、区分求積の問題はどんな問題がきても答えられるようになると思いますよ。

まずは、次のことを覚えておいてください。

区分求積の見つけ方

lim とシグマが合わさった問題では、区分求積を使うことが多い！

lim とシグマが合わさった問題とは、例えば $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ のような問題です。問題を見て、lim とシグマが合わさっていれば「あっ、区分求積かな？」と考えられるようにしておいてください。

で、以下が区分求積のワンパターン解法です。「なぜそうなるか？」ということは当然理解しておいた方がいいのですが、区分求積については「なぜそうなるか？」ということを理解していなくても解けてしまいます。

ですから、興味のない人は丸暗記でいいです。数学が好きな人は積分の意味を考えたら、今回の区分求積が成立することはあきらかだと感じると思います。積分の意味については、このプリントを見てください。「積分の意味の解説プリント http://www.hmg-gen.com/kaitou2-12.pdf」

区分求積のワンパターン解法

まず、強引に式変形をして $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=a}^{b} f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形に式変形をする。

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=a}^{b} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ になる。

ただし、$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}$, $\beta=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}$

上記のようにまとめたけど、これじゃあ何をしているのか分からないよね？そこで、実際に問題を解きながら解説をしていくことにします。

問題 1

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ の値を求めよ

【問題 1 の解説】

まず、上記の式には lim とシグマが合わさっている式だよね。だから、これを見た瞬間に「あっ、区分求積かな？」と考えられるようにしておいてください。

区分求積の問題では、$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=a}^{b} f\left(\frac{k}{n}\right)$ にすることが目的です。式で書いているので難しく感じるかもしれませんが、$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=a}^{b} f\left(\frac{k}{n}\right)$ とは、シグマの外に $\frac{1}{n}$ を持ってきて、シグマの中身を $\frac{k}{n}$ のみの式にすることです。

一度にするのは、難しそうなので、まずはシグマの外に $\frac{1}{n}$ をもってきたいと思います。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$
⇑ シグマの外に $\frac{1}{n}$ をつけるために無理やり $\frac{1}{n}$ をした。ただ、勝手に $\frac{1}{n}$ をつけてはダメなので、イコールが成立するように n をかけた！
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot n}{n^2+k^2}$$
⇑シグマの外の n をシグマの中にいれた。たまに、これが成立するか不安になる人がいるけど、例えば $\sum_{k=1}^{n}2k^2$ だったら、$\sum_{k=1}^{n}2k^2=2\sum_{k=1}^{n}k^2$ っていうようにシグマの外に数字を出すよね？シグマの問題では、k という文字以外なら外に出そうが中に入れようが自由です。
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}$$

とりあえず上記のように式変形をしたら、シグマの外に $\frac{1}{n}$ をつけることができました。後は、区分求積を使うには、$\sum f\left(\frac{k}{n}\right)$ にする。つまり、シグマの中身を $\frac{k}{n}$ のみの式にできたらＯＫです。

今回は、シグマの中身は $\frac{n^2}{n^2+k^2}$ ですが、これを $\frac{k}{n}$ のみの式にするには、分母分子を n^2 で割るだけです。

$$\frac{n^2}{n^2+k^2}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$ ◀ 分母分子を n^2 で割った！
$$=\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$ ◀ $\frac{k}{n}$ のみの式になった！

積分区間は、後で考えることにするととりあえず、以下のようになることが分かりました。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

上記のようになります。後は、積分区間を考えるだけです。積分区間は、冒頭の赤枠で囲んでいた部分に記述していますが、$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=a}^{b}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$。ただし、$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n},\beta=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}$ となります。

今回は $a=1$ なので $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}$ は $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ となるので、$\alpha=0$ となります。

同じようにすると、$b=n$ なので $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}$ は $\beta=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{n}=1$ になります。

以上より、積分区間が決まりました。与式は $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$ となります。

【問題 1 の解答】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

ここで、$x=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする。

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$x = \tan\theta$

$1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{d\theta}{dx}$ ◀ 両辺を x で微分をした

$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$ ◀ これが答え！

区分求積は、この解法でワンパターンで解けてしまいます。それでは、あと 2 問ほど区分求積の問題を解いてもらいます。

問題 2

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{5n}\right)$ を計算せよ

【問題 2 の解説】

これですが、シグマ表記されてはいませんが $\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{5n}\right)$ の部分は、$\displaystyle\sum_{k=1}^{5n}\sqrt[3]{k}$ とシグマで表記することができます。lim とシグマが合わさっているので、区分求積を使って解いていきます。

区分求積の問題では、シグマの前に $\dfrac{1}{n}$ をもってきて、シグマの中身を $\dfrac{k}{n}$ のみにするということが鉄則でした。今回の問題でも、そのルールに則って解いていきたいと思いま

す。

【問題２の解答】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{5n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{5n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{5n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}$$

⇑シグマの前に $\frac{1}{n}$ がきて、シグマの中身が $\frac{k}{n}$ のみの式になった！これで、区分求積を使える形になった。積分区間は $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \beta=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n}=5$ となります

$$=\int_0^5\sqrt[3]{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^5$$

$$=\frac{15}{4}\sqrt[3]{5}$$ ◀ これが答え

それでは、今回のプリントの最後の問題です。とある国公立大学の過去問です。大学受験の過去問と聞くと難しく感じるかもしれませんが、やることとしてはこれまでとまったく同じです。

問題３

$$\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k^2-2nk-8n^2}$$ を計算せよ

【問題３の解説】

今回の問題も区分求積をするだけです。区分求積はシグマの外に $\frac{1}{n}$ をつけて、シグマの中身を $\frac{k}{n}$ のみの式にしたら解くことができます。本当にワンパターンだよね。今回もそ

の方針で解いていきたいと思います。

シグマの外に n がありますが、それをとりあえずシグマの中に入れると、
$n\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k^2-2nk-8n^2}=\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{n}{k^2-2nk-8n^2}$ となります。これを式変形していきたいと思います。

$$\frac{n}{k^2-2nk-8n^2}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{k^2-2nk-8n^2}$$

⇑とりあえず $\frac{1}{n}$ を前に出さないといけないので、強引に $\frac{1}{n}$ を前に出した。

ここからの目的は、分数の中身が $\frac{k}{n}$ のみの式になることです。これは、$\frac{n^2}{k^2-2nk-8n^2}$ の分母分子を n^2 で割ることで、与式は $\frac{k}{n}$ のみの式になってくれます。最初のうちは、気付きにくいかもしれませんが、慣れてくるとすぐに思いつけるようになりますよ。

今回は積分区間を注意しないといけません。$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1, \beta=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n}=3$ です。
それでは、解答に進みます。

【問題３の解答】

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k^2-2nk-8n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{n}{k^2-2nk-8n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{n^2}{k^2-2nk-8n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\frac{k}{n}-8}$$
$$=\int_1^3\frac{1}{x^2-2x-8}\,dx$$
$$=\int_1^3\frac{1}{(x+2)(x-4)}\,dx$$
$$=\int_1^3\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$ ◀ 部分分数分解をした

$$= \frac{1}{6}\Big[\log|x-4| - \log|x+2|\Big]_1^3$$
$$= \frac{1}{6}(\log 1 - \log 5 - \log 3 + \log 3)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{6}\log 5}$$ ◀ これが答え

これで、今回の区分求積の解説は終わりです。たった３問でしたが、区分求積はワンパターンで解けるということが理解できましたでしょうか？区分求積は、入試でもよく出てきます。しっかりと理解しておいてください。それでは、がんばってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司