

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

関数 $f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x$ を考える

- (1) 関数 $g(x) = xe^x$ の最小値を求めよ
- (2) $f''(x) > 0$ であることを示せ
- (3) $f(x) = 0$ を満たす x や $f(x)$ の極値を与える x がどのような位置関係にあるかを考え、関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ
- (4) 関数 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ

*お茶の水女子大学の過去問です。お茶の水女子大学レベルから言えば標準的な問題です。お茶の水女子大学を目指している人はこのくらいの問題を当たり前のようにとけるようになっておいてください。

【(1) の解答】

$$\begin{aligned} g(x) &= xe^x \\ &= e^x + xe^x \\ &= e^x(1+x) \end{aligned}$$

よって増減表をかくと ◀ (注) を見よ

x		-1	
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

よって、増減表より $x = -1$ のときに最小値 $-\frac{1}{e}$ をとる

【(注)について】

$g'(x)$ について知らない人が多いので、 $g'(x)$ を説明しておきたいと思います。まず、次のことを覚えておいてください。

——グラフの増減について——

$f'(x) > 0$ のとき、グラフは増加関数である。

$f'(x) < 0$ のとき、グラフは減少関数である。

上記のことより、微分をしたときに知りたいことは、 $f'(x)$ の符号だけです。それ以外のことは必要ありません。

繰り返しになりますが、微分をしたいときに知りたいことは微分の符号だけです。今回の問題では $g'(x) = e^x(1+x)$ でした、 e^x は x の値にかかわらず常に正です。ということは、 $g'(x)$ の正負は $1+x$ の正負と一致します。 $1+x$ は $x < -1$ で負、 $x > -1$ で正となります。

当たり前のことですが、このあたりのことが理解できていない人が意外なほど多いです。しっかりと理解しておいてくださいね。

【(2) の解説】

この問題に入る前にまずは次のことを覚えておいてください。

——受験問題の考え方——

大学受験の問題で (1),(2),... となっていたら前問の結果を使って解いていく (ヒントにする) ことが多い!

特に (1),(2) が似ている形をしているとき、(1) が設問として設定するにはあまりに簡単なき、こういったときはまず間違いなく前問の結果を使います

今回の問題も (1) は、大学受験の問題としてはごくごく簡単だったよね? だから、おそらくこの (2) を解くときに、(1) の結果を使います。それでは、問題に進みます。

【(2) の解答】

$$f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x + 2x + 2 - e^{-2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x + e^x + xe^x + 2 \\ &= xe^x + 2e^x + 2 \end{aligned}$$

ここで、(1) より $xe^x \geq -\frac{1}{e}$ と $e^x > 0$ を考え

$$f''(x) > -\frac{1}{e} + 2 > 0 \text{ (証明終)}$$

(注) 今回は $f''(x) = xe^x + 2e^x + 2$ が 0 より大きいことを示せという問題です。

こういった問題の多くは $f''(x)$ を微分して $f'''(x)$ の符号を調べます。そして、 $f''(x)$ の増減表をかいて示していくことが多いです。

ただ、今回の問題はそうのように解くのではなく (1) の結果を使って解いていきました。

このように前問の結果を使うということは本当に多いので注意するようにしておいてください。

【(3) の解説】

とりあえずグラフをかかないといけないけど、まずは次の事柄を覚えておいてください。

——— グラフの凸性について ———

$f''(x) > 0$ のとき、グラフは下に凸である。

$f''(x) < 0$ のとき、グラフは上に凸である。

↑これは知らない人が多いですが、意外によくでてきますよ。もし忘れていた人は覚えておいてくださいね。

それでは、問題に進もうと思います。今回は少し変わった問題ですが、当たり前ですけど数学は問題文に従って問題を解いていきます。

今回も問題文に従って問題を解こうと思いますが、まずは「 $f(x) = 0$ を満たす x 」から求めていくことにします。 $f(x) = 0$ を満たす x を求めるには、当たり前ですが方程式

$xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x = 0$ を解けばOKです。

すべての項に x が含まれているので、 x でくくることができます。

$$xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x = 0$$

$$x(e^x + x + 2 - e^{-2}) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ または } e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$$

上記のようになります。方程式 $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ の解は $x = -2$ となります。ただ、この方程式は少し難しいので、なぜ方程式の解が $x = -2$ になるか？ということがわからない人もいます。ですから、今から順を追って話していきます。

まず、ずばり $x = -2$ が方程式 $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ の解になるということはわかると思います。 $x = -2$ を方程式に代入したら等号が成立します。だから、 $x = -2$ は解になるよね。

ただ、ここで注意しないといけないことがあります。方程式 $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ の解が $x = -2$ ということはわかりました。でも、この方程式が $x = -2$ 以外の解を持つかどうかかわからないよね。だから、考えていかないといけません。

今回の場合、結論から言えば方程式 $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ の解が $x = -2$ 以外の解はもちません。これは、方程式の左辺の $e^x + x + 2 - e^{-2}$ を $h(x)$ とでもして微分したらわかります。

$h'(x) = e^x + 1$ となるので $h(x)$ は単調増加です。単調増加のとき、 $y = h(x)$ のグラフと x 軸との共有点の個数は多くても1個だよ。だから、 $x = -2$ 以外は解に持ちません。

今回の方程式は、 $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ に $x = -2$ を代入してずばり解になるということがわかりました。こういった方程式は、解はずばり代入して求めるしかありません。そして、今回の方程式の場合もそうでした。解は1個のみとなることが多いです。

ただ、根拠がある訳ではないので、単調増加になる、などしっかりと確認をしておかないといけません。

こういうふうな方程式ですが、頻出という訳ではありませんが、ごくたまに出てきます。解けるようになっておいてください。

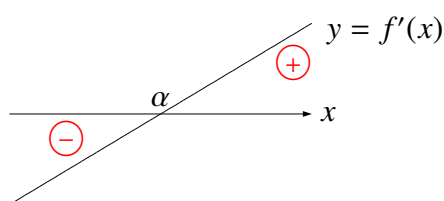
それでは、問題に進みます。次に「 $f(x)$ の極値を与える x がどのような位置関係にあるか」ということを考えていきます。先ほどは、「 $f(x) = 0$ を満たす x 」と書かれていたの
 で具体的な x の値を求めましたが、今回は「どのような位置関係にあるか」です。この
 表現から「ああ、極値は具体的な数値を求めることは無理だな」と気づけるようになって
 置いてください。

$$f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x + 2x + 2 - e^{-2}$$

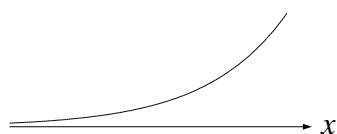
$$= (x + 1)e^x + 2x + (2 - e^{-2})$$

とりあえず、ここまできました。(2)を思い出して欲しいのですが $f''(x) > 0$ でした。と
 いうことは $f'(x)$ は増加関数です。このことを頭にいれて $f'(x)$ のグラフを簡単にかくと
 次のようになります。



$f'(x)$ は単調増加なグラフ。そのことを考えて図示すると上記のようになる。上記のよ
 うになった場合 $x = \alpha$ が $f'(x)$ の正負の変わり目。つまり極値(極小値)になる

今回は $f'(x)$ が増加関数という理由だけでグラフをかきました、もちろんこの条件だけな
 ら次のようになることも考えられます。



上図のようになったときも $f'(x)$ は単調増加という条件を満たしています。ですから、極
 値を持つためには $f'(x) < 0$ となるような x が存在しないといけないよね。そこで $f'(x)$
 に $x = -1, 0$ を代入してみます。

$x = -1, 0$ を代入する理由なんですけど、適当です。慣れてきたらすぐに気づけるんですけ
 ど、数学っていうのは一般的に項の数が少ないほど考えやすいです。 $f'(x) = (x + 1)e^x +$
 $2x + (2 - e^{-2})$ だけど、 $x = -1$ や $x = 0$ を代入すると項の数が少なくなって考えやすくな
 るよね。だから、 $x = -1, 0$ を代入します。

*数学は項の数が多いほど考えにくいって言ったけど、その他にも「文字が多ければ考えにくい」「次数が高いほど考えにく」といった事柄もあります。

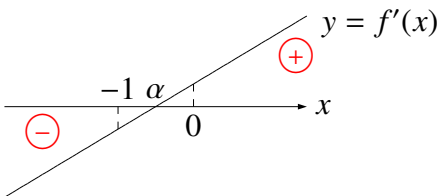
とにかく考えやすいように、考えやすいようにもっていくと自然と解けてしまいます。重要ですので、覚えておいてください。

あと、さっき「項」という表現を使いました。ですが、項とは厳密にいうと「多項式を構成しているおのおのの単項式」のことだから先ほどのものは項ではありません。でも、まあ分かるよね。

$$\begin{aligned}f'(-1) &= (-1+1)e^{-1} + 2 \cdot (-1) + 2 - e^{-2} \\ &= -2 + 2 - \frac{1}{e^2} \\ &= -\frac{1}{e^2} < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(0) &= (0+1)e^0 + 2 \cdot 0 + 2 - e^{-2} \\ &= 3 - \frac{1}{e^2} > 0\end{aligned}$$

このことより次のようになることが分かりました。



$f'(x)$ は $x < \alpha$ で負となり、 $x > \alpha$ で正となる。また、 α は $-1 < \alpha < 0$ を満たす。

ここまできたらグラフをかくことができます。それでは、解答に進みたいと思います。

【(3) の解答】

$$f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x = 0$$

$$x(e^x + x + 2 - e^{-2}) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ または } e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$$

$h(x) = e^x + x + 2 - e^{-2}$ とする。 $h'(x) = e^x + 1 > 0$ より、方程式 $h(x) = 0$ の実数解の個数は 1 個以下である。

$h(-2) = 0$ より、 $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ の実数解は $x = -2$ である。

よって、 $f(x) = 0$ の実数解は $x = -2, 0$ である。

$$f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x + 2x + 2 - e^{-2}$$

$$= (x + 1)e^x + 2x + (2 - e^{-2})$$

$$f'(-1) = (-1 + 1)e^{-1} + 2 \cdot (-1) + 2 - e^{-2}$$

$$= -2 + 2 - \frac{1}{e^2}$$

$$= -\frac{1}{e^2} < 0$$

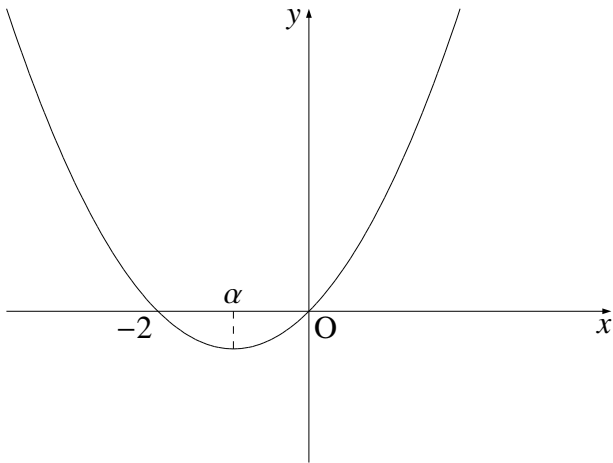
$$f'(0) = (0 + 1)e^0 + 2 \cdot 0 + 2 - e^{-2}$$

$$= 3 - \frac{1}{e^2} > 0$$

α を $f'(\alpha) = 0$ とする。(2) と $f''(x) > 0$ であることと $f'(-1) < 0, f'(0) > 0$ をあることより、 $-1 < \alpha < 0$ を満たす。以上のことを考えて増減表をかくと

x		α	
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\nearrow

また、(2) より $f''(x) > 0$ より、 $y = f(x)$ は下に凸な関数である。以上のことを踏まえグラフをかくと次のようになる。



【(4) の解答】

求める部分の面積を S とする。

$$S = \int_{-2}^0 \left(-\{xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x\} \right) dx \text{ となる。}$$

ここで、

$$\int xe^x dx$$

$$= \int x(e^x)' dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x$$

$$S = \int_{-2}^0 -(xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x) dx$$

$$= \left[-xe^x + e^x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2 - e^{-2})x^2 \right]_{-2}^0$$

$$= \left\{ -0 \cdot e^0 + e^0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{2}(2 - e^{-2})0^2 \right\} - \left\{ 2e^{-2} + e^{-2} - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2}(2 - e^{-2})(-2)^2 \right\}$$

$$= 1 - 2e^{-2} - e^{-2} - \frac{8}{3} + 2(2 - e^{-2})$$

$$= \frac{7}{3} - 5e^{-2}$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{5}{e^2} \leftarrow \text{これが答え}$$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司