
問題

$x > 0$ において定義された関数 $y = f(x) = x(1 + \log x)$ のグラフを C とする。また、曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線 l の方程式を $y = g(x)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $g(x)$ を求めよ

(2) $x > 0$ において、$f(x) \geqq g(x)$ であることを示せ

(3) ２直線 $x = 1,\ x = 2$ と曲線 C および接線 l で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ

(4) t が $t > 0$ の範囲を動くとき、面積 $S(t)$ が最小となる t を求めよ

【解説】

新潟大学の過去問です。大学受験の問題としては、それほど難しいものではありませんが、いろいろな微分積分の知識が必要になります。

中には、「そんなのあったの？」と思えるような学校ではあまり勉強をしないものも含まれているかもしれません。

ですが、今日話すようなことは大学受験では頻出です。理系の人は、ぜひともこの問題にチャレンジをするようにしてください。

【（１）の解答】

＊ (1) は単に接線を求めるだけなので、ごくごく簡単な問題です。それでは、解答に進みます。

$$f(x) = x(1+\log x)$$

$$f'(x) = 1\cdot(1+\log x) + x\cdot\frac{1}{x}$$ ◀ 積の微分を使って両辺を微分した

$$= 2 + \log x$$

よって、$x = t$ における接線の方程式は

$$g(x) - t(1+\log t) = (2+\log t)(x-t)$$

$$g(x) = \mathbf{(2+\log t)\,x - 2t - t\ \log t + t + t\ \log t}$$

$$= (2+\log t)\,x - t$$ ◀ これが答え

【（２）の解説】

まず、問題に進む前に次の事柄を覚えておいてください。

上に凸と下に凸

$f''(x) < 0$ のとき、$f(x)$ は上に凸な関数
$f''(x) > 0$ のとき、$f(x)$ は下に凸な関数

上記の性質を使って解くことも多いですよ。今回の問題とは関係ないけど、以下の問題を解いてみることにします。

補題

$0 < a < b$ のとき、$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) > \frac{2}{a+b}$ を示せ

【補題の解説】

まあ、普通に考えると以下のような解答をかくと思います。

【補題の（一般的な）解答】

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) > \frac{2}{a+b}$ を示す。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{2}{a+b} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{b\,(a+b) + a\,(a+b) - 4ab}{ab\,(a+b)} \quad \blacktriangleleft \text{通分をした} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{ab + b^2 + a^2 + ab - 4ab}{ab\,(a+b)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab\,(a+b)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{ab\,(a+b)} > 0 \ (\because\ (a-b)^2 > 0, ab\,(a+b) > 0)
\end{aligned}
$$

以上より、$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) > \dfrac{2}{a+b}$ が成立する。（証明終）

上記のような解答でもちろんＯＫなんですけど、先ほど説明をしたグラフの凸性を利用した解法で解いてみたいと思います。

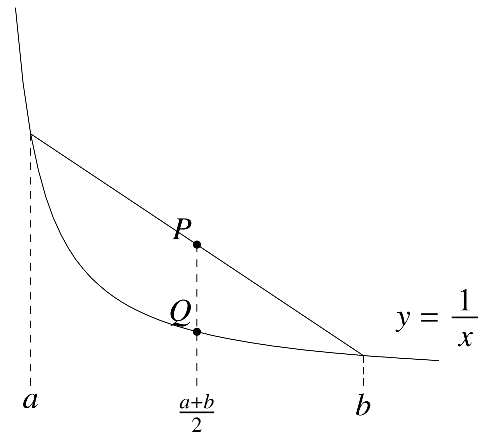
少し気づきにくいかもしれませんが $\dfrac{2}{a+b} = \dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}$ より、$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{2}{a+b}$ はいずれも $y = \dfrac{1}{x}$ 上にあります。

$y = \dfrac{1}{x}$ は、$x > 0$ のとき下に凸だということは知っていると思いますが、一応２階微分をして確認をしておきたいと思います。下に凸なときは、２階微分が正の値となるときです。

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x} \\
&= x^{-1} \\
y' &= -x^{-2} \\
y'' &= -(-2)x^{-3} \\
&= 2x^{-3} \\
&= \frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

$y''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ となりましたが、今回は $x > 0$ の範囲で考えているので当然 $y'' > 0$ というこ

とが言えます。よって、下に凸な関数です。



上図のようになります。P は 2 点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ と $\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を結んだ線分の中点とします。

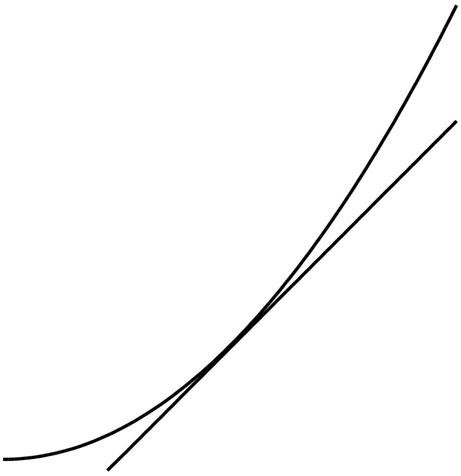
中点なので、当然 P の x 座標は $\dfrac{a+b}{2}$ で、y 座標は $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ となります。

Q は、$y=\dfrac{1}{x}$ 上の点で $x=\dfrac{a+b}{2}$ のときの点。Q の y 座標は $y=\dfrac{1}{x}$ に $x=\dfrac{a+b}{2}$ を代入して $y=\dfrac{2}{a+b}$ となります。

グラフが、下に凸なとき当然 P の y 座標の方が Q の y 座標よりも大きくなるので、$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)>\dfrac{2}{a+b}$ となります。

今回のこの問題だけなら、もちろんグラフの凸性ということを知らなくても簡単に解くことができますが、ただ単に計算式で解くよりも、視覚的にとらえた方がかなり短時間で解けるということも少なくありません。ぜひとも、覚えておいてください。

それでは、問題 (2) に戻りたいと思います。今回は、$f(x) \geqq g(x)$ を示せ。つまり、接線がもとの関数より常に下側にあることを示せということです。これも、普通に数式で解くこともできますが、凸性を考えたら一瞬だと思います。



下に凸な関数と接線の位置関係は上図のようになるので、下に凸な曲線は常に接線の上側にあります。

「グラフより」と解いてもいいかもしれませんが、一応数式で解いておきます。数式で示す時は、$f(x) - g(x)$ の最小値が 0 以上ということを使って示します。単に、微分をするだけの問題ですよ。

【(２) の解答】

$f(x) = x\,(a + \log x),\ g(x) = (2 + \log t)\,x - t$ のとき $x > 0$ で $f(x) \geqq g(x)$ を示す。

$$
\begin{aligned}
&f(x) - g(x)\\
=&x\,(1 + \log x) - (2 + \log t)\,x + t\\
=&x\ \log x - (1 + \log t)\,x + t
\end{aligned}
$$

ここで、$h(x) = x\ \log x - (1 + \log t)\,x + t$ とする。

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x\ \log x - (1 + \log t)\,x + t\\
h'(x) &= \log x + 1 - 1 - \log t\\
&= \log x - \log t
\end{aligned}
$$

よって、$h(x)$ は $x = t$ で極小かつ最小となる。$h(t) = t\log t - t - t\log t + t = 0$

以上より、$f(x) \geqq 0$ が言えるので、$f(x) \geqq g(x)$ が成立する。（証明終）

(注) $h'(x) = \log x - \log t$ のより、なぜ $x = t$ で極小になるかわからないという人もいるかもしれません。

微分というのは、正負を知るためだけに計算をします。正負以外は関係ありません。負のときは、減少関数となり、正のときは増加関数となります。

で、$h'(x) = \log x - \log t$ ですが、これの正負は $\log x$ と $\log t$ の大小関係によって決まります。

$\log x$ と $\log t$ の大小関係ですが、当然 x と t の大小関係と一致します。

$x - t$ は当然ですが、$x < t$ のときに $x - t < 0$ となり、$x > t$ のときに $x - t > 0$ となります。

よって、$h(x)$ は $x < t$ で減少関数、$x > t$ で増加関数となり、$x = t$ のとき、極小かつ最小となります。

「当たり前だよ」と思う人も多いと思いますが、知らない人も意外に多いです。本当に重要なので、しっかりと理解しておいてください。

【(３) の解答】

＊面積を求める時は、上下関係に注意をしますが、(2) より常に $f(x) \geqq g(x)$ が言えたので、後は普通に計算をするだけです。

(2) より、$x > 0$ で $f(x) \geqq g(x)$ が言えるので、求める面積 $S(t)$ は

$S(t) = \displaystyle\int_1^2 \left\{x \log x - (1 + \log t)\, x + t\right\} dx$ となる。

ここで、

＊一気に計算するのは面倒なので、まず $\displaystyle\int x \log x\, dx$ の計算をしたいと思います。当然、部分積分です。

$$\int x \log x\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \log x - \frac{1}{4}x^2$$

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \int_1^2 \left\{x \log x - (1+\log t)\,x + t\right\} dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}(1+\log t)\,x^2 + tx\right]_1^2 \\
&= \frac{4}{2} - 1 - \frac{1}{2}(1+\log t)\cdot 4 + 2t + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1+\log t) - t \\
&= 2\log 2 - 1 - 2 - 2\log t + 2t + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log t - t \\
&= \boldsymbol{-\frac{3}{2}\log t + t - \frac{9}{4} + 2\log 2} \blacktriangleleft \text{ これが答え}
\end{aligned}
$$

【(４) の解答】

＊これは、ただ単に微分をするだけの問題ですよ。

$$
\begin{aligned}
S(t) &= -\frac{3}{2}\log t + t - \frac{9}{4} + 2\log 2 \\
S'(t) &= -\frac{3}{2}\cdot t + 1 \\
&= \frac{-3+2t}{2t}
\end{aligned}
$$

ここで、$t > 0$ より $S'(t)$ の正負は $-3+2t$ の正負と一致する。これより、増減表をかくと

x	0		$\frac{3}{2}$	
$s'(t)$	×	$-$	0	$+$
$s(t)$	×	↘		↗

増減表より、$t = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$ のとき、極小かつ最小となる。

今回の問題はどうだったでしょうか？意外に知らないこともあったと思います。特に、関数の凸性については受験でも頻出なのでしっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司