「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\,dx\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $I_n + I_{n+2}$ の値を、n を用いて表せ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ の和を求めよ。

＊超がつくくらい頻出問題ですよ。始めのうちは難しいかもしれません。ですが、解けるようになっておいてくださいね。

【（１）の解説】

こういった問題を、積分漸化式の問題といいます。積分漸化式の問題は、以下のように式変形をすることが多いです。

積分漸化式の解法

積分漸化式のとき、最初の式変形は部分積分をすることが多い！

積分漸化式の問題は、多くの場合最初の式変形で部分積分をして解いていきます。

積分漸化式で、パッと思いつくものとしては $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n(\beta-x)^m\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos^m x\,dx$ の場合、最初の式変形で部分積分をします。

ただ、今回の $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\,dx$ は部分積分をしません。

積分漸化式は有名なものと、有名なものでないものがあります。有名なもので、部分積分をしないものは今回の $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ ぐらいかな？と思います。その他のものは部分積分をします。

ただ、「何が有名なもの」なんて受験オタクでもない限り、覚えておくなんて無理だよね。

積分漸化式が出てきたらとりあえず部分積分をできないか？と考えます。あるいは、実際に部分積分をやってみます。その結果としてうまくいけば OK だし、うまくいかなければ、その時点で別の解法があるのかな？ということで、頭を切り替えます。

また今回の問題に限って言えば、$I_n + I_{n+2}$ は誘導になっています。だから、誘導にのってとりあえずこの $I_n + I_{n+2}$ を計算してみることにします。

$$I_n + I_{n+2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,dx$$

＊ここからは、積分区間が同じなのでとりあず２つの定積分をひとつにまとめてみます。

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)\,dx$$

とりあえず、ここまで式変形をすることができました。で、ここからどうしようかな？と考えます。ただ、これはできたらすぐに変形を思いつけるようになって欲しいです。まずは、以下のことがらを覚えてください。

定積分の考え方

不定積分・定積分の計算で被積分関数（インテグラルの中身の関数のこと）が積の形になっているとき、$\displaystyle\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式を使うことができないか考える。

上記の説明に入る前に、まず $\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の確認をしておきます。

$\{f(x)\}^n$ を微分したらどうなるか分かるよね。合成関数の微分と呼ばれるものだけど $(\{f(x)\}^n)' = n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$ となります。

で、この公式で $\dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}$ を微分してみます。

$\left(\dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}\right)' = \dfrac{1}{\cancel{n+1}}\cdot(\cancel{n+1})\{f(x)\}^n\cdot f'(x) = f'(x)\{f(x)\}^n$ となります。

$\dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}$ を微分したら、$f'(x)\{f(x)\}^n$ となります。これで、$\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ が成立するということが理解できたよね。それでは、問題に戻ります。

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx$ は被積分関数が積の形になっています。このとき、$\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ は使えないかな？と考えるようにしてください。

＊被積分関数が、積の形をしているとき置換積分や部分積分で解くよりも、この $\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式を使って解いていくことの方が多いです。

特に、面積や体積などの計算では圧倒的なような気がします。重要なので覚えておいてくださいね。

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx$ で、三角比の相互関係より $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を使うと、$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$ です。

で、これもすぐに気づいて欲しいんだけど、$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なんだよね。これより、$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\cdot(\tan x)'\,dx$ となるので、公式を使えるタイプになりま

す。

繰り返しになるけど、実際の受験ではこの公式が使えることは本当に多いですよ。気を付けてくださいね。

【（１）の解答】

$$I_n + I_{n+2}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot (\tan x)'\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

【（２）の解説】

これぞ、ずばり大学受験の問題という問題です。大学受験特有の考え方を身につけて、このくらいだったらスラスラと解けるようになっておいてくださいね。

この問題では、以下の２つの考え方で、解法を発想することができます。

大学受験の問題の考え方

大学受験の問題で（１）、（２）となっているとき、（２）を解くときは（１）の結果を使って解いていくことが多い！

シグマの考え方

シグマの問題で、シグマの公式が使えないときは必ず $\sum(\bigcirc - \bigcirc)$ の互いに打ち消し合う形になっている！

＊シグマで互いに打ち消しあうものは、シグマの中身が分数のときで、部分分数分解をして解いていくものが有名です。シグマの難しい問題は、ほとんどのもので「互いに打ち消し合う形」にして解いていきます。シグマを見た瞬間に気づけるようになってくださいね。

上記、２つの考えかをもとにしてこの問題を解いていきます。

（１）の結果を使って、シグマの中身の $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ を引き算で互いに打ち消し合う形にしたいです。

（１）を見てみると、$I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ です。ここで、とりあえず分母だけでも $2n$ にするために、n を $2n-1$ で置き換えてみます。

そうすると、うまくいくかどうかわからないけど、右辺の $\dfrac{1}{n+1}$ の分母が $\dfrac{1}{2n}$ となってくれます。

＊こういう変形をすると「分母が $2n$ となってもうまくいくかどうかわかんないじゃん。こう式変形をしてもうまくいく確証はないんじゃないの？」なんて思う人がいます。

確かにそうですよ。で、結論から言えば、この解法で今回の場合うまくいきます。でも、僕も解く前からこの解法で「絶対にうまくいく」という確証はないですよ。

数学って、確証はなくてもとりあえずできそうなことをやってみます。それで、うまくいったら OK だし、うまくいかなければまた別の解法を考えます。

とりあえずやってみるということが、重要ですよ。ただ、「とりあえずやってみる」と言っても、ある程度「このときはこうする」というものを覚えておかないと話になりません。だから、典型問題を解いて有名な解法は自分のものにしておくということが重要です。

それでは、（１）の $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で、n を $2n-1$ に置き換えてみます。

$I_{2n-1}+I_{(2n-1)+2}=\dfrac{1}{(2n-1)+1}$ つまり $I_{2n-1}+I_{2n+1}=\dfrac{1}{2n}$ となります。

また、$n=1,2,3,4,5,\cdots$ でした。この部分も $2n-1$ に置き換えると、$2n-1=1,2,3,4,5,\cdots$ です。これより $2n=2,3,4,5,6,\cdots$ となり、$n=1,\dfrac{3}{2},2,\dfrac{5}{2},3\cdots$ となります。ただ、n は自然数なので、n を $2n-1$ に置き換えてできる式も $n=1,2,3,\cdots$ で成立する式です。

$I_{2n-1}+I_{2n+1}=\dfrac{1}{2n}$ の式の両辺に、$(-1)^{n+1}$ をかけます。

そうすると $(-1)^{n+1}I_{2n-1}+(-1)^{n+1}I_{2n+1}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ となります。

で、ちょっと気づきにくいけど、上記の左辺の $(-1)^{n+1}I_{2n+1}=-(-1)^{n+2}I_{2n+1}$ と強引に変形します。

＊「$(-1)^{n+1}I_{2n+1}=-(-1)^{n+2}I_{2n+1}$」は、ホントに強引な変形しただけですよ。

$(-1)^2=1$ です。1 をかけても値は変わらないので、$(-1)^{n+1}=(-1)^2(-1)^{n+1}=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^{n+1}=(-1)\cdot(-1)^{n+2}=-(-1)^{n+2}$ と変形しました。

文字で見ると、少し複雑です。ですが、やっていることとしては簡単ですよ。各自やってみて、成立しているということを確認しておいてください。

よって、$(-1)^{n+1}I_{2n-1}+(-1)^{n+1}I_{2n}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ は、$(-1)^{n+1}I_{2n-1}-(-1)^{n+2}I_{2n}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ と変形できます。

「変形自体は分かったけど、なんでそんな変わった式変形をしたの？」なんて思う人もいます。でも、これはさっきの「シグマの問題で公式が使えないときは、強引に $\sum(\bigcirc-\bigcirc)$ の形の互いに打ち消し合う形にする」という考えでやっています。

$(-1)^{n+1}I_{2n-1}-(-1)^{n+2}I_{2n}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ で、左辺で $(-1)^{n+1}I_{2n-1}=J_n$ とでもしてみると、$J_{n+1}=(-1)^{(n+1)+1}I_{2(n+1)-1}=(-1)^{n+2}I_{2n+1}$ となっています。だから、左辺は J_n-J_{n+1} となり、互いに打ち消しあう方になっているよね。

＊こういう式変形をすると、「言われたら気づくけど、自分ひとりではなかなか気づけないよ」なんて思う人がいます。確かにそうです。

でも、数学って「このときはこうする！」というルールがあります。このシグマの問題でも「互いに打ち消し合う形に絶対になってくれます（そうでないと解けない !! ）」

だから、「絶対にこうやったらうまくいくんだ」という気持ちで、あれこれしていたら少々強引な式変形でも気づけるようになってきます。ある程度、慣れも必要です。こういう問題の考え方を身につけるようにしてください。

それから、これは問題を解いていって気づくことですが、今回の問題は $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求める必要が出てきます。

こういった極限は、直接求めることができないのではさみうちの原理を使って求めます。

（１）より、$I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ です。右辺の極限値が 0 になることより、おそらく $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ となるのでは？と想像できます。これを念頭に不等式を作って、はさみうちに持ち込みます。

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき、$\tan^n x \geqq 0$ です。よって、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \geqq 0$ つまり $I_n \geqq 0 \cdots ①$ が言えます。

また、$I_{n+2} \geqq 0$ です。この式の両辺に I_n を加えると $I_n + I_{n+2} \geqq I_n$ です。さらに、この式に $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を代入すると $\dfrac{1}{n+1} \geqq I_n$ つまり $I_n \leqq \dfrac{1}{n+1} \cdots ②$ です。

①, ② より $0 \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ より $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ であることが言えます。それでは、解答に進みます。

【(２) の解答】

（１）の $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ で、n を $2n-1$ で置き換える。

$I_{2n-1} + I_{2n+1} = \dfrac{1}{2n} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\begin{aligned} I_{2n-1} + I_{2n+1} &= \frac{1}{2n} \\ (-1)^{n+1}I_{2n-1} + (-1)^{n+1}I_{2n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \\ (-1)^{n+1}I_{2n-1} - (-1)^{n+2}I_{2n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \end{aligned}$$

ここで $J_n = (-1)^{n+1}I_{2n-1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。$J_n - J_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+2}}{2n} \cdots ①$

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ の初項から第 n 項までの部分和を S_n とする。$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k}$ となる。

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (J_k - J_{k+1}) \ (\because \ ①) \\ &= (J_1 - J_2) + (J_2 - J_3) + \cdots + (J_{n-1} - J_n) \\ &= J_1 - J_n \end{aligned}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
J_1 &= (-1)^2 I_1 \\
&= I_1 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x} \, dx \\
&= \Big[-\log|\cos x| \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \log|\cos 0| \\
&= \frac{1}{2}\log 2 \cdots ②
\end{aligned}
$$

また、$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき、$\tan^n x \geqq 0$。よって、$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx \geqq 0$ つまり $I_n \geqq 0 \cdots ③$ が言える。

$I_{n+2} \geqq 0$ である。この式の両辺に I_n を加えると $I_n + I_{n+2} \geqq I_n$ となる。この式に $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ を代入すると $\frac{1}{n+1} \geqq I_n$ つまり $I_n \leqq \frac{1}{n+1} \cdots ④$ となる。。

③, ④ より $0 \leqq I_n \leqq \frac{1}{n+1}$ より $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ である。

＊このことを利用して、$J_n = (-1)^{n+1} I_{2n-1}$ の極限値を調べていきます。$(-1)^{n+1}$ は -1 か 1 です。だから、$-1 \leqq (-1)^{n+1} \leqq 1$ が言えます。このすべての辺に $I_{2n-1}(\geqq 0)$ をかけることで、はさみうちの原理を利用できる形になります。

また、これは極限の性質ですが、$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$ になります。これは、証明なしでいきなり使ってもらって OK ですよ

$-1 \leqq (-1)^{n-1} \leqq 1$ である。このすべての辺に $I_{2n-1}(\geqq 0)$ をかける。$-I_{2n-1} \leqq (-1)^{n-1} I_{2n-1} \leqq I_{2n-1}$ となる。

$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$ となる。

$\lim_{n\to\infty}(-I_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$。はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} J_n = 0$ となる。

よって、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(J_1 - J_n) = J_1 \ (\because \ \lim_{n\to\infty} J_n = 0)$

以上より、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = J_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

難しかったよね。でも、上位国立大学や早慶、理科大を受ける人はこういった問題が解けるかどうかが合否の分かれ目ですよ。

「分からない？なに言ってんの⁇」なんて人も、何度か繰り返せば解けるようになります。ぜひとも、繰り返し読んで、解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司