「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a, b を正の定数とし，長さ $a+b$ の線分 AB と，線分 AB を $a:b$ に内分する点 P を考える。線分 AB の端点 A は x 軸上，端点 B は y 軸上を動くものとする。

(1) 点 P の描く曲線の方程式を求めよ。

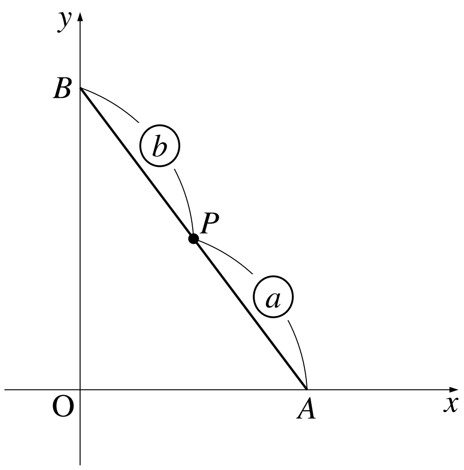
(2) この曲線に線分 AB が接するときの点 P の座標を求めよ。

＊筑波大学の過去問す。楕円の接線と軌跡に融合問題です。

決して難しい問題ではないですが、融合問題に慣れていないと少し難しいかもしれません。ですが、大学受験には融合問題は頻出なので、こういった問題を通してしっかりと解けるようになっておいてください。

【（１）の解説】

よく分からないけど、とりあえず図示していきます。



P の描く軌跡を求めるには A B の座標が必要なのでとりあえず $A(\alpha,0)$, $B(0,\beta)$ と座標を

設定します。

P の座標の求め方は、いろいろとあると思いますがここではベクトルを使って解いていきます。もちろん違う解法でも OK ですよ。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{b}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{b}{a+b}(\alpha, 0) + \frac{a}{a+b}(0, \beta) \\ &= \left(\frac{b}{a+b}\alpha,\ \frac{a}{a+b}\beta\right)\end{aligned}$$

P を $P(X, Y)$ とすると

$$\begin{cases} X = \dfrac{b}{a+b}\alpha \cdots ① \\ Y = \dfrac{a}{a+b}\beta \cdots ② \end{cases}$$

① より $\alpha = \dfrac{a+b}{b}X$

② より $\beta = \dfrac{a+b}{a}Y$

ここからは、α と β は解答を解く上で勝手に設定したのだから、なんとかして α と β は消去しないといけないよね。

そこで、どうしようかな？と考えるんだけど、次のことを思い出してほしいです。

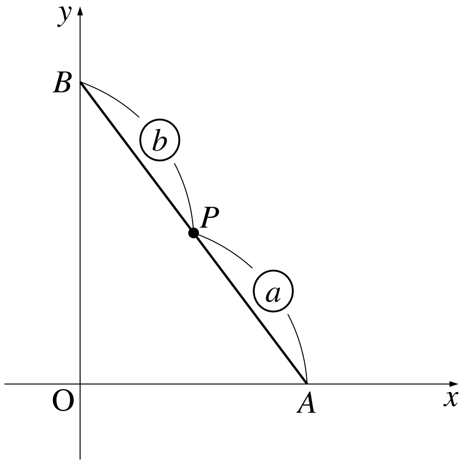
「数学は、与えられた条件は必ず全て使う」

与えられた条件は全て使わないといけないから、まだ使っていない条件はあるのかな？という感じで問題文を見直してみると線分 AB の長さが $a+b$ っていう条件はまだ使っていないよね。だから、この条件を使っていきます。△OAB は直角三角形だから $AB^2 = OA^2 + OB^2$ が成立します。

後は、これを使って α と β を消去するだけです。

では、解答に進みます。

【(１) の解答】



原点を O とする。
⇑ 数学では、問題文に書かれていない文字を使うときは、説明をしておかないといけません。O が原点であることはなかば当たり前なので、説明なしでもいいかもしれませんが、念のため説明をしておいた方がいいですよ。

また、$A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$ とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{b}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{b}{a+b}(\alpha, 0) + \frac{a}{a+b}(0, \beta) \\ &= \left(\frac{b}{a+b}\alpha,\ \frac{a}{a+b}\beta\right)\end{aligned}$$

P を $P(X, Y)$ とすると

$$\begin{cases} X = \dfrac{b}{a+b}\alpha \cdots ① \\ Y = \dfrac{a}{a+b}\beta \cdots ② \end{cases}$$

① より $\alpha = \dfrac{a+b}{b}X$

② より $\beta = \dfrac{a+b}{a}Y$

$OA^2 + OB^2 = OA^2$ より $\alpha^2 + \beta^2 = (a+b)^2$ が成立する。この式に ①, ② をそれぞれ代入すると

$$\left(\frac{a+b}{b}X\right)^2+\left(\frac{a+b}{a}Y\right)^2=(a+b)^2$$
$$\frac{(a+b)^2}{a^2}X^2+\frac{(a+b)^2}{a^2}Y^2=(a+b)^2$$
$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1$$ ◀ 両辺を $(a+b)^2(\neq 0)$ で割った

よって、P が描く曲線の方程式は $\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$ である。

【(２) の解説】

問題文には、「この曲線に線分 AB が接するとき」と書いてありますが、P は線分 AB 上にあるし、曲線上にもあるので、当然 P が接点となります。

また、意外に知らないというか忘れてしまっている人が多いんですが、楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ です。円の接線の公式とほとんど同じなので覚えやすいと思います。忘れていた人は、しっかりと覚えておいてください。

この問題は、上記を使っていくだけです。では、解答に進みます。

【(２) の解答】

点 P は、直線 AB 上にあり、また (1) で求めた $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ にあるので P が接点となる。

(1) より P の座標は $P\left(\frac{b}{a+b}\alpha,\ \frac{a}{a+b}\beta\right)$ となるので、

接線は $\dfrac{\frac{b}{a+b}\alpha}{b^2}x+\dfrac{\frac{a}{a+b}\beta}{a^2}y=1\cdots(*)$ ◀ 楕円の接線の公式より となる。

$(*)$ は $A(\alpha, 0)$ を通るので、$(*)$ に $x=\alpha,\ y=0$ をそれぞれ代入して

$$\frac{\frac{b}{a+b}\alpha}{b^2}\alpha = 1$$

$$\frac{b\alpha^2}{(a+b)\,b^2} = 1$$

$$\alpha^2 = b\,(a+b)$$

$$\alpha = \pm\sqrt{b\,(a+b)}$$

同様にして、$(*)$ は $B\,(0,\beta)$ を通るので、$(*)$ に $x=0,\ y=\beta$ をそれぞれ代入して

$$\frac{\frac{a}{a+b}\beta}{a^2}\beta = 1$$

$$\frac{a\beta^2}{a^2\,(a+b)} = 1$$

$$\beta^2 = a\,(a+b)$$

$$\beta = \pm\sqrt{a\,(a+b)}$$

求める座標 P は $\left(\frac{b}{a+b}\alpha,\ \frac{a}{a+b}\beta\right)$ なので

$\boldsymbol{P\left(\pm\frac{b\sqrt{b\,(a+b)}}{a+b},\ \pm\frac{a\sqrt{a\,(a+b)}}{a+b}\right)}$ (複合は任意) となる。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司