
問題

i を虚数単位とし、α と β を複素数で $\alpha \neq 0, \beta = 1 + ti\,(t > 0)$ とする。このとき、数列 $\{z_n\}$ を次で定義する。

$$z_1 = \alpha,\ \ z_{n+1} = \beta z_n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

以下の各問に答えよ。

(1) 複素数平面において原点を O とし、z_n を表す点を P_n とする。三角形 OP_nP_{n+1} の面積を α, t, n を用いて表せ。

$\alpha = -1 + \sqrt{3}i,\ t = \tan\dfrac{5}{12}\pi$ とする。z_n が正の実数となる番号 n を小さいほうから順に $m_1, m_2, m_3, \cdots$ とする。

(2) $n = m_1$ のとき z_n がどのくらいの大きさなのかを調べたい。$n = m_1$ のとき $|z_n - 10^p|$ の値が最小となる自然数 p を求めよ。

(3) 数列 $\{m_k\}$ の一般項を k を用いて表せ。

【（１）の解説】

本格的な大学受験の問題です。上位国立や国立医学部を目指す人は解けるようになっておいてくださいね。

$z_{n+1} = \beta z_n$ より、数列 $\{z_n\}$ は公比 β の等比数列です。また、$z_1 = \alpha$ となっているので初項は α です。これより、$z_n = \alpha\beta^{n-1}$ です。

＊複素数のときも、実数のときと同じように漸化式を解くことができますよ。覚えておいてくださいね。

$z_n = \alpha\beta^{n-1}$ より $z_{n+1} = \alpha\beta^n$ です。でも、これだったら 2 点 $P_n(z_n)$ と $P_{n+1}(z_{n+1})$ の位置関係が分からないよね。

そこで、どうしようかな？と思うんだけど $\beta = 1 + ti$ を強引に極形式に変形することにします。

＊例えば、α に $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ をかけると、$\alpha\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$ です。$\alpha\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$ は、点 α の原点からの距離を r 倍し、さらに原点を中心に θ だけ回転させて点です。

このように、複素数平面のときは極形式をかけたとき、２点の位置関係をとらえやすいです。だから、今回も極形式で表記します。

$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(ただし \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ と極形式に変形できるんだったんだよね。

で、$\beta = 1 + ti = \sqrt{t^2 + 1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(ただし \sin\theta = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\right)$ と極形式に変形できます。

で、今回の場合問題で $t > 0$ と与えられています。だから、$\beta = 1 + ti$ の偏角 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たしますよ。

OP_n と OP_{n+1} の長さも分かりました。そして、$\angle P_nOP_{n+1} = \theta$ であることがわかりました。これで三角形 OP_nP_{n+1} の面積を求めることができます。

【（１）の解答】

$\beta = 1 + ti = \sqrt{t^2 + 1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(ただし \sin\theta = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\right)$ とする。

$z_1 = \alpha$，$z_{n+1} = \beta z_n$ より、$z_n = \alpha\beta^{n-1}$ である。よって、$z_{n+1} = \alpha\beta^n$ となる。

また、$\beta = 1 + ti$ より $|\beta| = \sqrt{1+t^2}$
⇑ $|\beta|$ が必用なので求めておきました。$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ より、$|\beta| = \sqrt{1+t^2}$ です。

$$
\begin{aligned}
&|z_n| \\
=&|\alpha\beta^{n-1}| \\
=&|\alpha||\beta^{n-1}| \\
=&|\alpha||\beta|^{n-1} \\
=&|\alpha|(\sqrt{t^2+1})^{n-1} \quad (\because \ |\beta| = \sqrt{t^2+1})
\end{aligned}
$$

＊複素数のときも、実数のときと同じく $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ が成立します。証明は $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ でやればできますよ。これより、$|\alpha^n| = |\alpha|^n$ の成立します。よって、上記のように変形をすることができます。

$$
\begin{aligned}
&|z_{n+1}| \\
=&|\alpha\beta^n| \\
=&|\alpha||\beta^n| \\
=&|\alpha||\beta|^n \\
=&|\alpha|(\sqrt{t^2+1})^n \quad (\because \ |\beta| = \sqrt{t^2+1})
\end{aligned}
$$

また、点 P_{n+1} は点 P_n を原点を中心に θ だけ回転させて、原点からの距離を $\sqrt{t^2+1}$ 倍したものである。
⇑$z_{n+1} = \beta z_n$ で、$\beta = \sqrt{t^2+1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ より。複素数は、極形式をかけたら、回転を表すんだったんだよね。

三角形 OP_nP_{n+1} の面積を S とすると、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、$S = \frac{1}{2}|z_n||z_{n+1}|\sin\theta$ と表される。
⇑$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、三角形の面積は上記のように計算できます。もし、$\pi < \theta < 2\pi$ だと、$S = \frac{1}{2}|z_n||z_{n+1}|\sin(2\pi - \theta)$ としないとダメだよね。気を付けてくださいね。

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|z_n||z_{n+1}|\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}|\alpha|(\sqrt{t^2+1})^{n-1}\cdot|\alpha|(\sqrt{t^2+1})^{n}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}
\end{aligned}
$$

$\Uparrow$ $|z_n| = |\alpha|(\sqrt{t^2+1})^{n-1}, |z_{n+1}| = |\alpha|(\sqrt{t^2+1})^{n}, \sin\theta = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ より

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}|\alpha|^2\cdot(\sqrt{t^2+1})-1\cdot(\sqrt{t^2+1})^{n}\cdot(\sqrt{t^2+1})^{n}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \\
&= \frac{t(t^2+1)^n|\alpha|^2}{2(t^2+1)} \\
&= \boldsymbol{\frac{t(t^2+1)^{n-1}|\alpha|^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$\Uparrow|\alpha|^2=\alpha^2$ としたらダメですよ。α が実数のときは $|\alpha|^2=\alpha^2$ と変形できます。でも、α が複素数のときは、$|\alpha|^2=\alpha^2$ と変形できません。気を付けてくださいね。

【(２)、(３）の解説】

まあ、なんだか難しそうだけど、問題文で「z_n が正の実数となる番号 n を小さいほうから順に $m_1, m_2, m_3, \cdots$ とする」となっているよね。

$\alpha = -1+\sqrt{3}i$ と与えられているし、$t = \tan\dfrac{5}{12}\pi$ つまり $\beta = 1 + i\tan\dfrac{5}{12}\pi$ です。

この２つは極形式で表せそうです。だから、極形式で表して解いていくことにするね。

＊ $z_n = \alpha\beta^{n-1}$ です。このままでは計算があまりに複雑です。でも、極形式なら、複雑かもしれないけど、なんとか計算できるよね。だから、極形式にします。

$\alpha = -1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ と極形式にできます。

$$
\begin{aligned}
\beta &= 1 + i\tan\frac{5}{12}\pi \\
&= 1 + i\frac{\sin\frac{5}{12}\pi}{\cos\frac{5}{12}\pi} \\
&= \frac{1}{\cos\frac{5}{12}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)
\end{aligned}
$$
◀ 極形式で表した！

＊極形式とは $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の形で表された式のことで、θ はなんでも OK です。$r>0$ です。

$r<0$ のものは極形式ではありません。また、原点 (つまり $r=0$ となるとき) は、なす角 θ がないので極形式で表すことはできません。

今回の場合、r にあたる部分が $\dfrac{1}{\cos\frac{5}{12}\pi}$ です。少し考えたら分かるけど、$\cos\frac{5}{12}\pi$ は正の数だよね。

だから、$\dfrac{1}{\cos\frac{5}{12}\pi}>0$ より、$r>0$ となるので極形式です。この部分が負だと極形式でないので気を付けてくださいね。

ちなみに、$r<0$ のとき、$r(\cos\theta+i\sin\theta)=-r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$ と変形すれば、極形式になりますよ。

極形式の積とド・モアブルの定理について

$$\boldsymbol{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}}$$

また、以下をド・モアブルの定理という

$$\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

上記の積ですが、証明は簡単ですよ。左辺は頑張って展開します。そして、右辺は加法定理で展開します。そうすると、左辺と右辺が一致してくれます。まあ、かけ算は「足し算」と覚えておけば、比較的覚えやすい公式ではあるよね。

次のド・モアブルの定理は、積の形から証明することができます。丁寧にするには帰納法を使って示せば OK ですよ。

それでは、これをつかって $z_n=\alpha\beta^{n-1}$ を変形していくことにするね。

$$
\begin{aligned}
z_n &= \alpha\beta^{n-1} \\
&= 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\times\left\{\frac{1}{\cos\frac{5}{12}\pi}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\right\}^{n-1} \\
&= 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\times\frac{1}{\cos^{n-1}\frac{5}{12}\pi}\left\{\cos\frac{5}{12}(n-1)\pi + i\sin\frac{5}{12}(n-1)\pi\right\}^{n-1} \quad \text{◀ ド・モアブルの定理より！} \\
&= \frac{2}{\cos^{n-1}\frac{5}{12}\pi}\left(\cos\left\{\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{12}(n-1)\pi\right\} + i\sin\left\{\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{12}(n-1)\pi\right\}\right) \quad \text{◀ 極形式の積の公式より！} \\
&= \frac{2}{\cos^{n-1}\frac{5}{12}\pi}\left\{\cos\left(\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

少しややこしかったけど、z_n をかなり変形することができました。

で、ここから考えていきます。今回は、「z_n が正の実数」となるんだよね。実数だけだったら簡単です。虚部が 0 となったら OK です。でも、今回の場合実数だけでなくて「正の実数」と正がつくんだよね。

そこで少し考えます。でも、$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が正の実数となるとき、$\theta = 2n\pi$ となっていたらいいんじゃないかな？

ただ、今回 n はもう使っているので、$2i\pi$ で解いていってみることにするね。上記で書いた通り、θ にあたるところは $\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4}$ だったから、この部分が $2\pi i$ (i は整数)。つまり、$\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4} = 2\pi i$ だったら OK です。

両辺に 12 をかけてこの式を整理すると $5n - 24i = -3$ となります。

で、ここからは簡単だよね。これは、単なる 1 次不定方程式ですよ。方程式のひとつを強引に求めて解いていくんだったんだよね。

何でもいいけど、できるだけ小さな数の方が簡単です。例えば $n = 9, i = 2$ が方程式の解です。つまり、$5\cdot 9 - 24\cdot 2 = -3$ が成立します。

$5n-24i=-3$ と $5\cdot 9-24\cdot 2=-3$ の辺々を引いて整理すると $5(n-9)-24(i-2)=0$ つまり $5(n-9)=24(i-2)$ です。5 と 24 は互いに素なので、$n-9$ は 24 の倍数でないといけません。l を整数として、$n-9=24l$ つまり $n=24l+9$ となります。

＊少し長くなったけど、あとは帳尻合わせのことをすればおしまいですよ。あと少し頑張ってね。

問題が前後しちゃうけど、まず（３）から解いていくことにします。z_n が正の実数となる番号 n を小さい方から $m_1, m_2, m_3, \cdots$ とするんだよね。

さっき解いたように $n=24l+9$ を満たすとき z_n が正の実数となります。で、n は 1 以上の自然数なので、$n=24l+9$ をみたす最小の自然数は $l=0$ のときで $n=9$、次に $l=1$ のときで $n=24\cdot 1+9=33$ です。

よって、数列 $m_k=9, 33, 57, \cdots$ となります。これは、初項 9、公比 24 の等差数列なので第 k 項の m_k は、$m_k=9+(k-1)\cdot 24=24k-15$ となります。これが最終的な答えですよ。

今は上記のように考えました。ですが、$n=24l+9$ で l を $k-1$ で置き換えると考えてもらってもいいですよ。

（２）は少し大変ですが、フツウに計算をしていくだけです。それでは、解答に進みます。

【(２）の解答】

$\alpha=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$。

$$\beta = 1 + i\tan\frac{5}{12}\pi$$

$$= 1 + i\frac{\sin\frac{5}{12}\pi}{\cos\frac{5}{12}\pi}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{5}{12}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$ ◀ 極形式で表した！

$$z_n = \alpha\beta^{n-1}$$

$$= 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \times \left\{\frac{1}{\cos\frac{5}{12}\pi}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\right\}^{n-1}$$

$$= 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \times \frac{1}{\cos^{n-1}\frac{5}{12}\pi}\left\{\cos\frac{5}{12}(n-1)\pi + i\sin\frac{5}{12}(n-1)\pi\right\}^{n-1}$$ ◀ ド・モアブルの定理より！

$$= \frac{2}{\cos^{n-1}\frac{5}{12}\pi}\left(\cos\left\{\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{12}(n-1)\pi\right\} + i\sin\left\{\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{12}(n-1)\pi\right\}\right)$$ ◀ 極形式の積の公式より！

$$= \frac{2}{\cos^{n-1}\frac{5}{12}\pi}\left\{\cos\left(\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4} = 2\pi i$ (i は整数) のとき、z_n は正の実数となる。

$5n - 24i = -3 \cdots ①$ とする。また、① の解の組のうちのひとつは $n = 9, i = 2$ なので $5 \cdot 9 - 24 \cdot 2 = -3 \cdots ②$ が成立する。

①, ② の辺々を引くと $5(n-9) - 24(i-2) = 0$ つまり $5(n-9) = 24(i-2)$ が成立する。

5 と 24 は互いに素であるので、$n-9$ は 24 の倍数である。l を整数として、$n - 9 = 24l$ つまり $n = 24l + 9$ となる。$n \geqq 1$ より $n = m_1$ となるのは $l = 0$ のときで、このとき $n = 9$ となる。

$z_9 = \dfrac{2}{\cos^8 \frac{5}{12}\pi}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = \dfrac{2}{\cos^8 \frac{5}{12}\pi}$

$\Uparrow$ $\dfrac{2}{\cos^{n-1} \frac{5}{12}\pi}\left\{\cos\left(\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$ に $n = 9$ を代入した！

＊ここから $\cos \frac{5}{12}\pi$ の値を求めます。$\cos \frac{5}{6}\pi$ の値だと求めることができます。半角の公式を使います。

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\cos^8 \frac{5}{12}\pi \\
=&\left(\cos^2 \frac{5}{12}\pi\right)^4 \\
=&\left(\frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{5}{12}\pi}{2}\right)^4 \quad \blacktriangleleft \cos^2\theta = \frac{1-\cos\theta}{2} \text{ の公式より！} \\
=&\left(\frac{1 - \cos \frac{5}{6}\pi}{2}\right)^4 \\
=&\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right)^4 \\
=&\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^4 \\
=&\left(\frac{1}{4(2 + \sqrt{3})}\right)^4 \\
=&\frac{1}{2^8(2 + \sqrt{3})^4} \quad \blacktriangleleft z_9 \text{ を求めるとき、分母に } \cos^8 \frac{5}{12}\pi \text{ がくることを見越して計算した！}
\end{aligned}
$$

よって、$z_9 = 2^9(2 + \sqrt{3})^4$

＊ $|z_9 - 10^p| = \left|2^9(2 + \sqrt{3})^4 - 10^p\right|$ となっています。10^p って割と大きい数 (どこまでを大きい数と言うか判断しにくいが、10 を何乗もしていくと大きい数になる) になるよね。で、今から $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$ なので、これで計算していってもらっても大丈夫です。

ただ、$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$ ということは高校の教科書に載っている訳でないので使わない方が無難です（基本的に証明なしで使ってよいのは、教科書に載っている事柄のみです)。だから、例えば $1.73^2 = 2.9929, 1.74^2 = 3.0276$ と計算した上で $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ としてやっ

ていってもらえばよいです。

ただ、今回の場合そこまで絞り込むことはありません。だから、例えば $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$ とでもしてやっていこうと思います。「どうしてこうしたの？」と聞かれることがあります。でも、これは勘です。「このくらいでできるかな？」ということです。とりあえずやってみて OK ならこれを使うし、ダメならその時点で別の解法を考えます。

$\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$

⇑このくらいなら証明なしで OK。心配なら $\frac{9}{4} < 3 < 4$ が成立より、と書いておけば OK です。

$\frac{7}{2} < 2 + \sqrt{3} < 4$ ◀ すべての辺に 2 を加えた！

$\left(\frac{7}{2}\right)^4 < (2 + \sqrt{3})^4 < 4^4$ ◀ すべての辺を 4 乗した！

$2^9 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^4 < 2^9(2 + \sqrt{3})^4 < 2^9 \cdot 4^4$ ◀ すべての辺に 2^9 をかけた！

$76832 < 2^9(2 + \sqrt{3})^4 < 131702$ ◀ 頑張って計算をした。$2^{10} = 1024$ はよく出るので暗記！

$|76832 - 10^p|$ が最小となる p は $p = 5$ のとき。

⇑少し考えれば分かりますよ。もし、分からない人は、実際に $p = 4$ や $p = 5$ を代入して確認してください。$p = 5$ のとき、確かに最小となっていることが分かると思いますよ。

また、$|131072 - 10^p|$ が最小となる p は $p = 5$ のときである。

⇑ これも少し確認したら分かると思います。$76832 < 2^9(2 + \sqrt{3})^4 < 131702$ が言えているので、真ん中の $2^9(2 + \sqrt{3})^4$ のときも $p = 5$ で最小となりますよ。

よって、$|z_9 - 10^p|$ が最小となる自然数 p は、$p = \mathbf{5}$ である。

【(３）の解答】

＊（2）で不定方程式を解きました。それを使うだけです。$n = 24l+9$ と表されます。ただ、n は自然数なので、それに合わせるだけですよ。（2）より $n = 24l+9$ (l は整数) となる。
n は自然数であるので、これをみたす自然数 n は $l = 0, 1, 2, \cdots$ のときで、$n = 9, 33, 57, \cdots$ となる。

よって、$m_k = 9 + (k-1) \cdot 24 = \mathbf{24k - 15 \ (k = 1, 2, 3, \cdots)}$

今回の問題は、問題を見たらすごく難しそうな問題に見えました。ただ、ひとつずつ丁寧に解いてみると、難問ではありますが、そこまで理解できない問題ではないと思えたと思います。

難関大学の合否を分けるのはこういった問題です。とにかく丁寧にひとつずつ考えていくしかありません。ただ、丁寧に解いていけば必ず、解けるように作られています。こういう本格的な大学受験の問題を解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司