「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

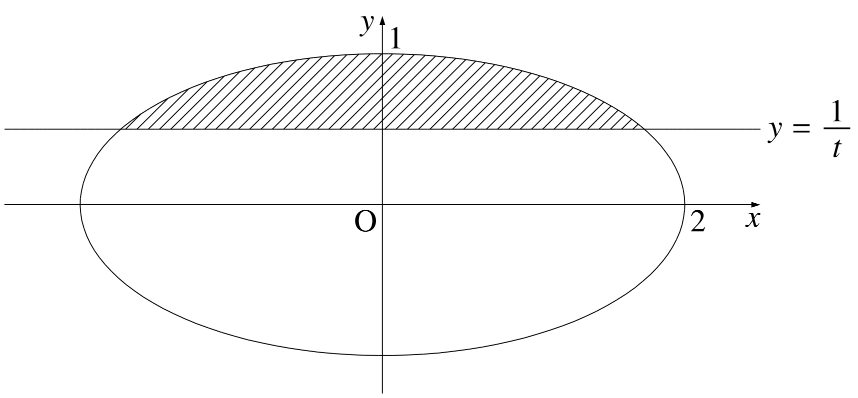
「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

曲線 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $y=\dfrac{1}{t}$ $(t>1)$ で囲まれた２つの部分のうち面積が小さい部分の面積を $S(t)$ とする。このとき、導関数 $S'(t)$ の最大値を求めよ。

【問題の解説】

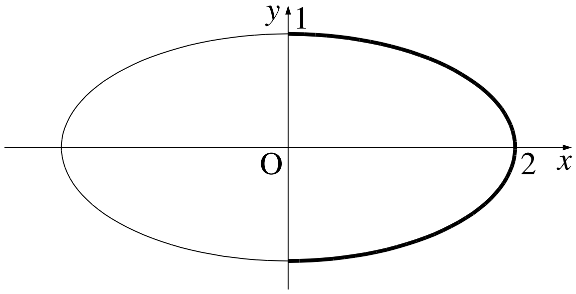
まあ、よくわからないけどとりあえず図示をしてみることにするね。$t>1$ のとき $0<\dfrac{1}{t}<1$ です。この範囲に気を付けて楕円と直線 $y=\dfrac{1}{t}$ を図示します。

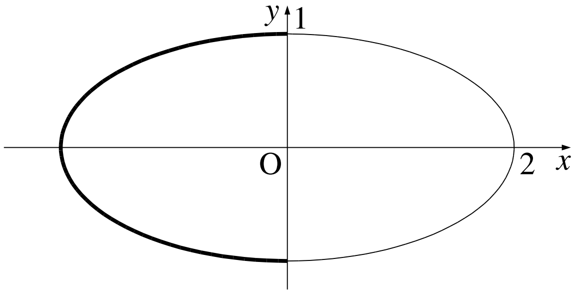


で、上図の面積を求めるとき楕円と直線の交点の x 座標を求めて、x で積分をして求めようとする人がいます。

もちろん、それでもできないことないですが、今回は y で積分をした方がいいですよ。

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x について解くと、$x=\pm 2\sqrt{1-y^2}$ となります。





上図左側の楕円の右半分の濃い部分が方程式 $x = 2\sqrt{1-y^2}$ で表される部分です。で、上図右側の楕円の左半分の濃い部分が方程式 $x = -2\sqrt{1-y^2}$ で表される部分です。

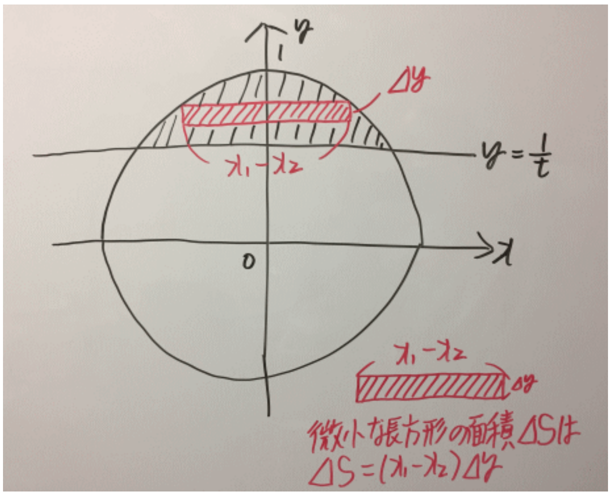
このことは図を見たら分かるよね。上図の左側は $x \geqq 0$ の部分です。$x = 2\sqrt{1-y^2}$ と $x = -2\sqrt{1-y^2}$ のうち $x \geqq 0$ は $x = 2\sqrt{1-x^2}$ の方だよね。

今回みたいに、楕円の右半分、左半分が出てくることはあまりないです。ただ、円の上半分と下半分だと頻出ですよ。

例えば原点を中心とする半径が 1 の円で、上半分を表す方程式は $y = \sqrt{1-x^2}$ で、下半分を表す方程式は $y = -\sqrt{1-x^2}$ です。

楕円の右半分、左半分なんてやったことがなかった、という人でも意味を考えたら上記のようになるということは、あきらかだよね。解けるようになっておいてくださいね。

下図は楕円で $x \geqq 0$ の部分を x_1 つまり $x_1 = 2\sqrt{1-y^2}$、$x \leqq 0$ の部分を x_2 つまり $x_2 = -2\sqrt{1-y^2}$ としています。



上図のようになります。だから、斜線部の面積 $S(t)$ は、$S(t) = \displaystyle\int_{\frac{1}{t}}^{1}(x_1 - x_2)\,dy$ となりますよ。

積分の面積の求め方がわからないという人は、以下のプリントをみてください。
「積分の面積の意味の解説プリント」https://www.hmg-gen.com/kaitou2-12.pdf

$x_1 = 2\sqrt{1-y^2}$ で、$x_2 = -2\sqrt{1-y^2}$ だから、

$$S(t) = \int_{\frac{1}{t}}^{1}(x_1 - x_2)\,dy = \int_{\frac{1}{t}}^{1}\{2\sqrt{1-y^2} - (-2\sqrt{1-y^2})\}\,dy = 4\int_{\frac{1}{t}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$$ となります。

で、ここから定積分の計算をしようかな？なんて思ったらダメですよ。問題をよく見てくださいね。今回の場合、$S'(t)$ の最大値を求めよです。だから、必要なのは $S'(t)$ なんだよね。

もちろん $S(t)$ の定積分を計算してから $S(t)$ を微分をしても求められるかもしれないけど、そんなことする必要はありません。今回は、以下の公式を使います。

定積分を含んだ式の微分の公式

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

この公式だけど、たまに出てくるから覚えておいてくださいね。で、今回の $S(t)=4\int_{\frac{1}{t}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$ もこの公式を使って両辺を t で微分します。

ただ、今回の場合 $\int_{\frac{1}{t}}^{1}$ と積分区間の一方が 1 で、t を含まない定数だよね。こんなとき、定数の微分は 0 になることを気を付けて微分してください。

$$S(t)=4\int_{\frac{1}{t}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$S'(t)=-4\left(\frac{1}{t}\right)'\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}$$

今回は、$S'(t)$ の最大値を求めよという問題です。当然 $S'(t)$ を微分して求めていきます。
ここまでくると解けると思うので、解答に進みます。

【問題の解答】

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ より $x=\pm 2\sqrt{1-y^2}$

$x_1=2\sqrt{1-x^2}, x_2=-2\sqrt{1-x^2}$ とする。

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_{\frac{1}{t}}^{1}(x_1-x_2)\,dy\\&=4\int_{\frac{1}{t}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\ \ (\because\ \ x_1=2\sqrt{1-x^2}, x_2=-2\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S'(t)&=-4\left(\frac{1}{t}\right)'\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}\\&=\frac{4}{t^2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\\&=4\sqrt{\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}}\ \blacktriangleleft\ \frac{1}{t^2}\text{ をルートの中に入れた！}\\&=4\sqrt{\frac{t^2-1}{t^6}}\end{aligned}$$

＊今回は $\frac{1}{t^2}$ をルートの中に入れました。今回の場合、別にルートの中にいれずにそのまま計算しても OK です。

ただ、一般的にルートを含んだ計算は面倒です。だから、今回のように $S(t) = 4\sqrt{f(t)}$ のように変数を含んだ式をすべてルートの中に入れられるときは、入れて考えます。

こうなると、ルートの中身の $f(t)$ の最大値だけで考えることができるので、計算がラクになることが多いです。

$\dfrac{t^2-1}{t^6}$ が最大となるとき $S(t)$ も最大となる。以下 $\dfrac{t^2-1}{t^6}$ が最大となるときを考える。
$\Uparrow$ 当たり前だけど、今回の場合ルートの中身が最大となるとき $S(t)$ も最大となるよね。
さらに、ルートの中身は t^2 のみの式だから、$t^2 = s$ とでもして解いていきます。

$\dfrac{t^2-1}{t^6}$ で $t^2 = s$ とする。$t > 1$ より $s > 1$ となる。

$\dfrac{t^2-1}{t^6} = \dfrac{s-1}{s^3} = f(s)$ とする。

$$
\begin{aligned}
f(s) &= \frac{s-1}{s^3} \\
f'(x) &= \frac{(s-1)'s^3 - (s-1)\cdots{}^3}{s^6} \quad \blacktriangleleft \text{ 商の微分の公式より} \\
&= \frac{s-3(s-1)}{s^4} \\
&= \frac{-2s+3}{s^4}
\end{aligned}
$$

$s^4 > 0$ より、$f'(s)$ の符号と $-2s+3$ の符号は一致する。このことより、増減表は以下のようになる。

s	1		$\frac{3}{2}$	
$f'(s)$		$+$	0	$-$
$f(s)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$

増減表より、$s = \dfrac{3}{2}$ のとき $f(s)$ は最大となる。

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{27}{8}}$$

$$=\frac{12-8}{27}$$ ◀ 分母分子に８をかけた！

$$=\frac{4}{27}$$

このとき、

$$4\sqrt{\frac{t^2-1}{t^6}}$$

$$=4\sqrt{\frac{4}{27}}$$

$$=\frac{8}{9}\sqrt{3}$$

以上より、$t^2=\frac{3}{2}$ つまり $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき、最大値 $\boldsymbol{\frac{8}{9}\sqrt{3}}$ をとる。

この問題は、徳島大学（医学部、歯学部、薬学部）の過去問を少し変更したものです。少し考えにくい問題だったかもしれません。ですがよく出てくるタイプの問題ですよ。

国立大学を目指す人は、数学 III が特に重要です。こういった問題を解けるようになっておいてくださいね。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司