「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

x の多項式 $f(x)$ は

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = 0,\ \ f(1) = f(-1) = 0$$

を満たしているとする。

(1) このとき $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 f'(x)\,dx = 0$ を示せ。

(2) さらに多項式 $f(x)$ は３次以下で $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = 1$ を満たしている。このような $f(x)$ を求めよ。

【問題（１）の解説】

まあ、まず問題を見て、積分区間が -1 から 1 なんだよね。もし、被積分関数の $x^2 f'(x)\,dx$ が奇関数だったら定積分の値が０になってくれるな、と考える人もいます。

でも、今回の場合、この解法はダメです。なぜかというと、「$f(x)$ は x の多項式」としか言われていないので、$x^2 f'(x)$ がいつも奇関数になる、なんてことありえないよね。だから、この解法はダメです。

そこで、次の解法を考えていきます。

＊数学の問題って、「こうやったら解けそう … 」と思える解法をとりあえずやってみます。それで解けたら OK だし、解けなかったらまたその時点で「じゃあ、違う解法があって、その解法でやっていけばいいんだな」と考えます。

問題を見た瞬間に解き方が分かっている訳ではないですよ。また、「(うまくいくという確証はないけど）とりあえずやってみる」ということも多いです。

うまくいくという確証はまったくないけど、やってみます。すると「あら、解けちゃった」なんてことも多いですよ。

いろいろと思いつく解法で解いていくということがポイントです。ただ、解法を思いつくためには典型的な解法を頭に入れておかないといけません。そういうのは、学校で使っている問題集やチャートといった網羅系の市販の問題集で典型問題の解法をインプットしていってください。

「とりあえず、奇関数で解くのはムリだった。じゃあ、どうしよう？」と考えます。今回の場合、$f(x)$ は多項式としか言われていません。だから、一般化された状態で、解ける解法を考えます。

で、よく見ると、被積分関数が積の形になっているし、片方が微分されているよね。これは、「部分積分が使えるのかな？」と気づけるようになって欲しいです。

部分積分の公式 $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ を使えば、解くことができます。

【注】
まあ、人によって違います。でも、$\int xe^x\,dx$ の部分積分はできるけど、上記の公式は覚えていないという人がいます。

上記の公式を使って解いていることはいるのでしょうが、感覚的に解いてしまっていて、上記の公式をしっかりと書ける人は少ないです。

上記の公式を難しく感じてる人が多いです。でも、いたって簡単ですよ。積の微分の公式から簡単に導けます。一応、導いておくね。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ ◀ 積の微分の公式より

$$f'(x)g(x) = \{f(x)g(x)\}' - f(x)g'(x)$$ ◀ 移項して、$f'(x)g(x) = \cdots$ の形にした！

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b (\{f(x)g(x)\}' - f(x)g'(x))\,dx$$ ◀ 両辺を a から b で定積分をした。

$$= \int_a^b \{f(x)g(x)\}'\,dx - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

⇑ 定積分の性質 $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ より、定積分をふたつに分けた！

$$= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

⇑ $f'(x)$ を積分したら $f(x)$。よって、$\int_a^b f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b$ が成立する!これより、$\int_a^b \{f(x)g(x)\}'\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$ が言えます。

まあう、少し見にくいけど（やっていることはすごい簡単だよ）、これで部分積分の公式を導くことができました。もし、忘れちゃった場合のために、自分で導けるようになっておいてくださいね。

【問題（１）の解答】

$$\int_{-1}^1 x^2 f'(x)\,dx$$

$$= \Big[x^2 f(x)\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2)' f(x)\,dx$$ ◀ 部分積分の公式より！

$$=1^2 \cdot f(1) - (-1)^2 f(-1) - \int_{-1}^1 2x\,f(x)\,dx$$

$$= -2\int_{-1}^1 xf(x)\,dx \quad (\because \quad f(-1)=0,\quad f(1)=0)$$

$$=0 \quad \left(\because \quad \int_{-1}^1 xf(x)\,dx = 0\right)$$

よって、$\int_{-1}^1 x^2 f'(x)\,dx = 0$ が成立する。（証明終）

【問題（２）の解説】

$f(x)$ は $f(1)=f(-1)=0$ をみたす３次以下の多項式です。$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおいて $f(1)=0$ かつ $f(-1)=0$ で解いていってもらってもかまいません。

でも、数学では文字の種類が少ないほど計算がラクになることが多かったです。多項式 $f(x)$ が $f(a)=0$ を満たしているとき、$f(x)$ は $(x-a)$ を因数に持ちます。

今回の場合、$f(1)=f(-1)=0$ より $(x+1)(x-1)$ を因数にもちます。また $f(x)$ は３次式以下であるということより、$f(x)=(ax+b)(x+1)(x-1)$ とおくことができます。

後は、a,b の値を求めるだけです。受験問題で、（１）、（２）となっているとき（２）は（１）の結果を使って解いていくことが多いです。

ただ、今回の場合使わない方がラクなのかな？と思うので、使わずに解いていきます。

＊ $f(x)=(ax+b)(x+1)(x-1)$ とおいたので、a,b の値を決定しないといけません。a,b の値を決定するには、a,b を含んだ方程式が２個必要です。

（１）の結果を使うより、$\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=0$ と $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx$ を使う方がラクです。いきなり解いていくのではなくて、「どっちの方が計算がラクになるだろう？」と考えてから解いていくことにしてください。

【問題（２）の解答】

$f(x)$ は $f(1)=f(-1)=0$ を満たす３次以下の多項式であるので、a,b を定数として、$f(x)=(ax+b)(x+1)(x-1)$ とおける。

$$\begin{aligned} f(x)&=(ax+b)(x+1)(x-1)\\ &=(ax+b)(x^2-1)\\ &=ax^3+bx^2-ax-b \end{aligned}$$

◀ 展開しないと積分ができないので展開をした！

$\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = 0$ より

$$\int_{-1}^{1} (ax^4 + bx^3 - ax^2 - bx)\,dx = 0$$

$$2\int_{0}^{1} (ax^4 - ax^2)\,dx = 0$$ ◀ 偶関数・奇関数より！

$$2\left[\frac{1}{5}ax^5 - \frac{1}{3}ax^3\right]_0^1 = 0$$

$$2\left(\frac{1}{5}a - \frac{1}{3}a\right) = 0$$

$$-\frac{4}{15}a = 0$$

$$a = 0$$

＊今回の問題は、$f(x)$ は３次式以下の多項式です。これがもし３次式の多項式となっていれば $a \neq 0$ です。ただ、今回の場合３次式以下なので、$a = 0$ でも **OK** です。

ただ、$a = 0$ となるのは答えがすっきりしすぎます。数学的な根拠がある訳ではないですが、$a = 0$ となることは少ないです。そんな場合、「あやしいな」と感じて、より丁寧に見直すというクセをつけておいてくださいね。

ただ、今回の場合 $a = 0$ が正解です。

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = 0$ より

$$\int_{-1}^{1} f(x)e^x\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} (bx^2 - b)e^x\,dx = 0$$

⇑積分区間が -1 から 1 ですが、偶関数でも奇関数でもないので、偶関数・奇関数は使えません。この形がきたら部分積分をするしかないですよ。部分積分を２回するタイプですよ。

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(bx^2-b)(e^x)'\,dx &= 1 \\
\Big[(bx^2-b)e^x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(bx^2-b)'e^x\,dx &= 1 \\
(b-b)e-(b-b)e^{-1} - \int_{-1}^{1}2bxe^x\,dx &= 1 \\
-\int_{-1}^{1}2bx(e^x)'\,dx &= 1 \\
-\Big[2bxe^x\Big]_{-1}^{1} + 2b\int_{-1}^{1}x'e^x\,dx &= 1 \\
-2be-2be^{-1}+2b\int_{-1}^{1}e^x\,dx &= 1 \\
-2be-2be^{-1}+2b\Big[e^x\Big]_{-1}^{1} &= 1 \\
-2be-2be^{-1}+2be-2be^{-1} &= 1 \\
-4be^{-1} &= 1 \\
b &= -\frac{e}{4}
\end{aligned}
$$

よって、$f(x) = \boldsymbol{-\frac{e}{4}(x^2-1)}$ である。

この問題は、お茶の水女子大学の過去問です。お茶の水女子大学といえば難関ですが、この問題自体はそこまで難しく無かったよね。

もちろん、解けなかったという人もいると思いますが、解説を読んだら「意外に簡単だったな」と思えるはずです。受験ではこういうレベルの問題が多いです。まずは、しっかりとこういったレベルの問題を解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法

https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司