「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

関数 $f(x) = |x| \sin x$ の $x = 0$ における微分可能性を調べよ。

【問題の解説】

まずは、微分の定義です。

微分の定義

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

上記ですが、「覚えにくい」という人がいます。僕の場合、「２点 $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ を通る直線の傾き」と覚えています。

傾きは $\dfrac{(\text{y の変化量})}{(\text{xの変化量})}$ なので、２点 $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ を通る直線の傾きは、$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ となります。後は、リミットをつけたら微分の定義になります。

こういうふうに覚えたら微分の定義を覚えやすいと思いますよ。絶対にこういうふうに覚えないといけない訳ではありません。ただ、この微分の定義に関する問題は、大学受験でもよく出てくるので覚えておいてくださいね。

それでは、次に微分係数の定義です。微分係数は、さきほどの導関数 $f'(x)$ の x を a に置

き換えたものです。

微分係数の定義

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

上記が本来の定義です。ただ、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ も微分係数の定義として扱う人もいます。

これは、微分係数の定義の $\displaystyle f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ で $a+h=x$ と置換することで導くことができます。

もちろん、このように $a+h=x$ と置換して導いてもよいのですが、僕の場合「2 点 $(a,f(a)),(x,f(x))$ を通る直線の傾き」と覚えています。こっちの方が簡単に $\displaystyle f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が思い出せると思いますよ。

それでは、今から微分可能性について話していきます。

微分可能性について

極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するとき、$f(x)$ は $x=a$ で微分可能である。

極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束しないとき、$f(x)$ は $x=a$ で微分不可能である。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能かどうかは、極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するかどうかで判断することができます。

ここからは、完全に極限の問題です。ほとんどの問題の場合、極限が収束するかどうかは右側極限と左側極限で考えていきます。

＊極限に関しては、以下のページで、詳しく解説したプリントを無料で公表しています。
興味のある人は、URL 先からお申込みください。

「極限の解説プリント」https://www.hmg-gen.com/kyokugenp.html

今回の場合、$x=0$ における微分可能性を問われています。$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ で、$a=0$ を代入すると、$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ です。だから、$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が収束するかどうかを考えていきます。

で、この問題の場合も右側極限と左側極限で考えていきます（極限が収束するかどうかを考えるとき、右側極限と左側極限で考えていくことが多かったんだよね）。

極限の収束条件をまとめておくね。

極限が収束する条件

右側極限 $\lim_{x\to a+0} f(x)$、左側極限 $\lim_{x\to a-0} f(x)$ がともに同じ値に収束するとき、$\lim_{x\to a} f(x)$ も収束する。

＊右側極限と左側極限が両方とも同じ値に収束するときはじめて元の極限も収束します。片方しか収束しなかったり、また両方とも収束したとしても右側極限と左側極限の極限値が違う場合、元の極限は収束しません。

たまに、「どういうときに右側極限と左側極限を使うのですか？突然出てくることが多くて、分かりません」と質問を受けることがあります。

この回答ですが、「関数が２つで表されるとき」です。

どういうことかと言うと、今回の関数は $f(x)=|x|\sin x$ と絶対値を含んでいるよね。絶対値の中身が０以上のときと、０未満のときとで場合分けをします。

こういうときに、右側極限と左側極限で考えていきます。それでは、解答に進みます。

【問題の解説】

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \quad ◀\ \lim_{h\to a+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\text{ で } a=0 \text{ のとき}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{|h|\sin h-|0|\sin 0}{h} \quad ◀\ f(x)=|x|\sin x \text{ より、} f(h)=|h|\sin h,\ f(0)=|0|\sin 0 \text{ より！}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{h\sin h}{h} \quad ◀\ h\to+0 \text{ のとき } h>0 \text{ つまり } |h|=h$$

$$=\lim_{h\to+0}\sin h$$

$$=\sin 0$$

$$=0$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \quad ◀\ \lim_{h\to a+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\text{ で } a=0 \text{ のとき}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{|h|\sin h-|0|\sin 0}{h} \quad ◀\ f(x)=|x|\sin x \text{ より、} f(h)=|h|\sin h,\ f(0)=|0|\sin 0 \text{ より！}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{-h\sin h}{h} \quad ◀\ h\to-0 \text{ のとき } h<0 \text{ つまり } |h|=-h$$

$$=\lim_{h\to-0}(-\sin h)$$

$$=-\sin 0$$

$$=0$$

＊右側極限も左側極限も同じ値に収束するので、$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が極限値をもちます。
つまり、$x=0$ で $f(x)$ は微分可能です。

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0,\ \lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$ より、極限 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ は 0 に収束する。

よって、関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

【注】
上記の、$\displaystyle\lim_{h\to+0}\sin h=\sin 0$ や $\displaystyle\lim_{h\to-0}(-\sin h)=-\sin 0$ という式変形をしてよいのかどうかわからないという人がいます。

僕は生徒さんに「極限は代入できるときは代入してよい」と解説しています。上記も単純に $h=0$ を $\sin h$ や $-\sin h$ に代入したと思えば簡単だよね（右側極限や左側極限は関係

なく、０に近づくときは０を代入します)。

上記は、数学的にいって少し厳密さをかきますが、高校数学の極限は上記のようにすれば解くことができます。まあ、厳密に言えば「関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続なとき、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$」です。連続なときにしか代入できません。

ただ、高校数学の範囲で連続でないものはすぐに気づけるものが多いです。$\frac{1}{x-1}$ は $x = 1$ で連続でないです。代入して分母が０になるときは連続でないです。あとは、ガウス記号や $\tan x$ などホントに限られているので、連続でない関数はすぐに気づけるものがほとんどですよ。

だから、極限はほとんどの場合代入してもらって大丈夫です。少し、テキトーな説明ですが、このくらいまで理解できていれば十分ですよ。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司