「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

$-\dfrac{1}{4} < s < \dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s = \{(x, y, 0) \mid 1 \leqq x \leqq 2+4s,\ 1 \leqq y \leqq 2-3s\}$$

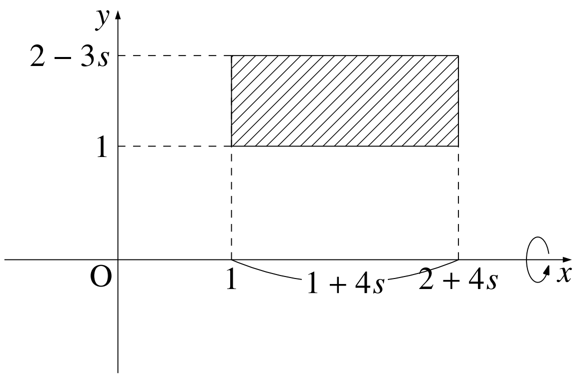
がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに１回転してできる立体を K_s とする。

(1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値、およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2) s を（１）で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに１回転してできる立体 L の体積を求めよ。

【問題（１）の解答】

＊（１）は簡単ですよ。R_s を x 軸のまわりに１回転してできる立体は円柱から円柱をくりぬいたような図形です。体積は、外側の円柱の体積から内側の円柱の体積を引けば求めることができますよ。



$V(s)$ は底辺の半径 $2-3s$ 高さ $1+4s$ の円柱の体積から、底辺の半径１高さ $1+4s$ の円柱

の体積を引いたものである。

$$V(s) = \pi(2-3s)^2(1+4s) - \pi \cdot 1^2 \cdot (1+4s)$$
$$= \pi(1+4s)\{(2-3s)^2 - 1\}$$ ◀ 共通因数 $1+4s$ でくくった！
$$= \pi(1+4s)(9s^2 - 12s + 3)$$
$$= 3\pi(1+4s)(3s^2 - 4s + 1)$$

⇑ とりあえず因数分解しました。ですが、展開してもどっちでもよいと思いますよ。

$$V'(s) = 3\pi\{(1+4s)'(3s^2-4s+1) + (1+4s)(3s^2-4s+1)'\}$$ ◀ 積の微分の公式より！
$$= 3\pi\{4(3s^2-4s+1) + (1+4s)(6s-4)\}$$
$$= 3\pi(12s^2 - 16s + 4 + 24s^2 - 10s - 4)$$
$$= 6\pi s(18s - 13)$$

よって、$-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ の範囲で増減表をかくと以下の通り。

s	$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		↗	3π	↘	

増減表より、$s = \mathbf{0}$ のとき、$V(s)$ は最大値 $\mathbf{3\pi}$ をとる。

【問題（２）の解説】

（２）は難しい問題ですよ。しっかりと理解してくださいね。

今回の問題は、体積を求める問題です。体積を求めるとき、立体がどういった形になるだろう？と想像する人がいます。

でも、体積を求めるのに立体図形の形は分からなくてもいいですよ。体積を求めるには、切断面の面積が分かれば求めることができます。

切断面の面積が $S(t)$ だとすると、体積 V は $V=\int S(t)\,dt$ で求めることができます。回転体の体積で、$V=\int \pi y^2\,dx$ を公式として覚えている人がいます。

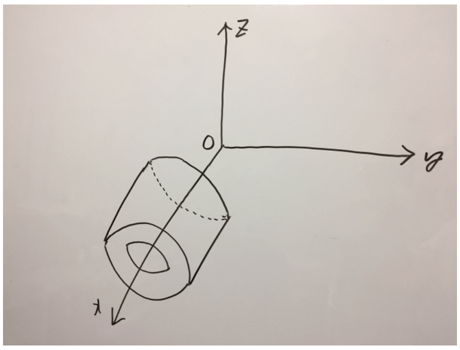
でも、これは公式ではないですよ。πy^2 が切断面の面積です。面積を積分したら体積を求めることができますよ。この部分が分からない人は、以下のプリントが参考になると思います。

積分の意味の解説プリント https://www.hmg-gen.com/kaitou2-12.pdf
新潟大学の過去問で直線 $y = 1$ で回転する回転体の体積のもんだい https://www.hmg-gen.com/k-tensaku101109.pdf

先ほど、体積を求めるときは立体の形は関係ない。切断面の面積さえ分かれば面積を求めることができます。理論上、どのように切断面をとったとしても体積を求めることができます。

ただ、通常体積を求めるときは x 軸に垂直な平面（yz 平面に平行）、y 軸に垂直な平面（zx 平面に平行）、z 軸に垂直な平面（xy 平面に平行）な切り口で考えていきます。

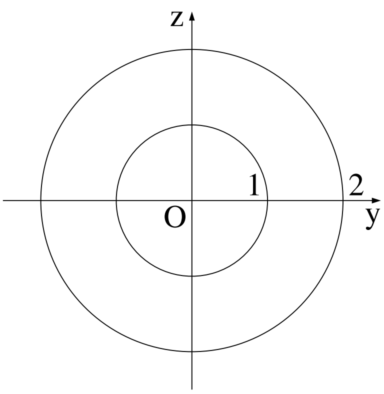
問題によっては、どの切り口で考えるのが一番計算がラクになるかな？と考えないといけない問題があります（非回転体の体積の問題のとき）。ですが、今回の問題は y 軸のまわりに 1 回転です。こういうふうになっているときは、平面 $y=t$ の切り口（y 軸に垂直な切り口、zx 平面に平行でもある）で考えるということが決まり事です。覚えておいてくださいね。



今回は上図の円柱から円柱をくりぬいた立体図形 (K_0) を y 軸のまわりに 1 回転します。

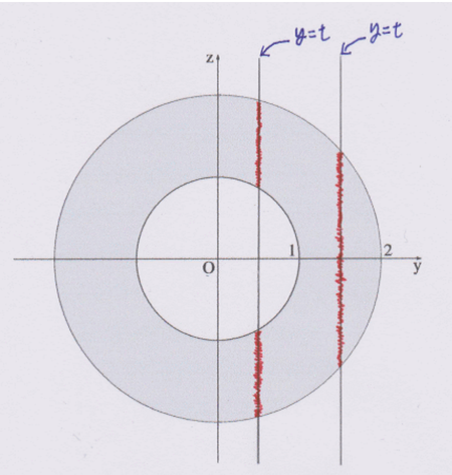
まあ、立体感覚に強い人ならどういった立体図形になるか想像できるかもしれません。ただ、普通の人は無理だと思います。僕も、全然想像できません。でも、さっきも話したように体積を求めるのに立体図形がどんな形か？ということは必要ないですよ。切り口（今回の場合、平面 $y = t$）の面積さえ分かれば体積を求めることができます。

今、この立体図形 K_0 を x 軸の真上から眺めると、以下のようになるよね。



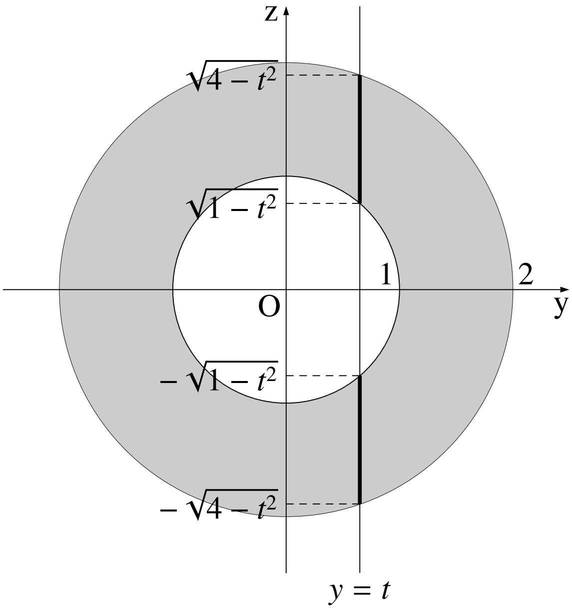
で、今回平面 $y = t$ の切り口で考えるんだったんだよね。yz 平面だと、$y = t$ は直線を表します。$y = t$ の位置によって切断面の形が変わるので場合分けが必要です。

＊切断面の形が t の値によって変わってくる問題は受験では頻出です。このとき、場合分けをして解いていくしかありません。よく出てくるので、解けるようになっておいてくださいね。



$t \geqq 0$ だけで考える (今回 y 軸のまわりに 1 回転する立体 K_0 は $y \geqq 0$ の部分と $y \leqq 0$ の部分は対称です。だから、分かりやすい $y \geqq 0$ の部分の回転体の体積を求め、それを 2 倍します。今回、$y = t$ で考えているんだから、$y \geqq 0$ のとき、$t \geqq 0$ ですよ) と、上記のように $0 \leqq t \leqq 1$ のときと、$1 \leqq t \leqq 2$ のときとでは直線 $y = t$ と領域の交わった部分は変わってくるよね。だから、場合分けが必要です。

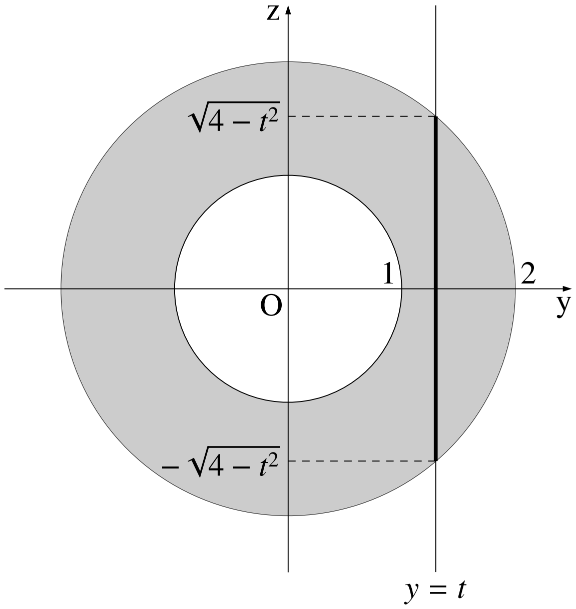
まずは、$0 \leqq t \leqq 1$ のときで考えます。



上図の、$\pm\sqrt{4-t^2}$ や $\pm\sqrt{1-t^2}$ は、$y^2+z^2=4$ と $y=t$、$y^2+z^2=1$ と $y=t$ を連立して求めたものですよ。

上図より、z は $-\sqrt{4-4^2} \leqq z \leqq -\sqrt{1-t^2}$, $\sqrt{1-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{4-t^2}$ を満たします。

次に、$1 \leqq t \leqq 2$ のときを考えていきます。



上図より、$-\sqrt{4-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{4-t^2}$ が成立します。

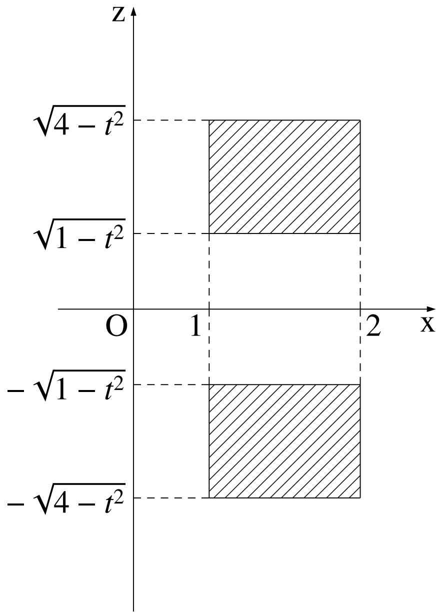
これで、平面 $y=t$ の切り口の面積を求める準備が整いました（まだ、少し複雑だけど …
頑張ってついていきてね）。

平面 $y=t$ を図示していきます。

まずは、$0 \leqq t \leqq 1$ のときを考えるね。

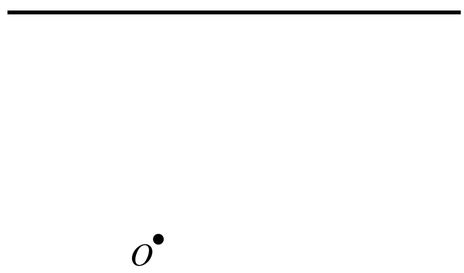
立体 K_0 を平面 $y=t$ で切ったときの切断面です。

x の方は $1 \leqq x \leqq 2$ で、z の方は先ほど書いたように $-\sqrt{4-4^2} \leqq z \leqq -\sqrt{1-t^2}$, $\sqrt{1-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{4-t^2}$ となります。これを図示すると、以下のようになります。

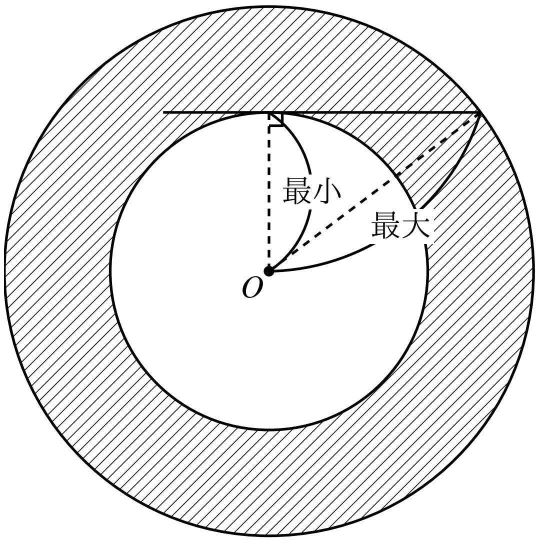


上図が立体 K_0 を平面 $y=t$ で切ったときの切り口です。で、今回は y 軸回転なんだよね。つまり、上記の部分を y 軸のまわりに 1 回転します。

で、今から 1 回転したときの切断面がどうなるか？ということを話していきます。

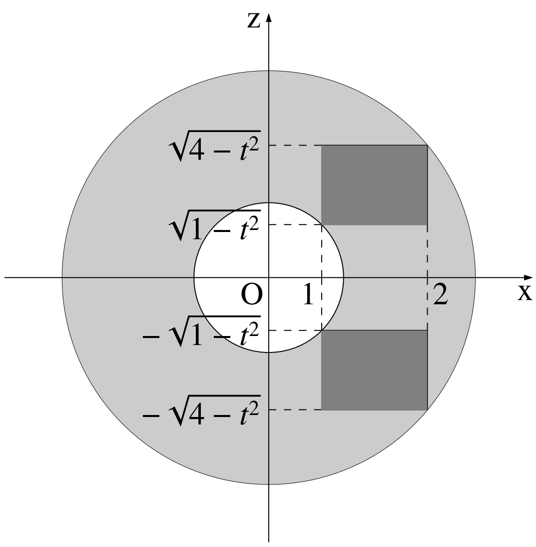


上図のような線分を点 O のまわりに 1 回転したときにできる図形はどうなるか分かるかな？これよく出てくるから覚えていてね。結論から言えば、点 O から線分までの距離が一番近いところ（この場合、点 O から線分に垂線をおろした点）を点 O を中心に 1 回転してできる円と、点 O から線分までの距離が遠いところを点 O を中心に 1 回転してできる円の間の部分になります。



上記のようになるのは、ゆっくりと考えたら分かると思いますよ。もし、分からないという人は結果を覚えておいてくださいね。一番遠いところを半径とする円と一番近いところを半径とする円の間ですよ。

それでは、今回の問題に戻ります。今回の問題も回転の中心から一番近いところと、遠いところを考えると以下のようになります。

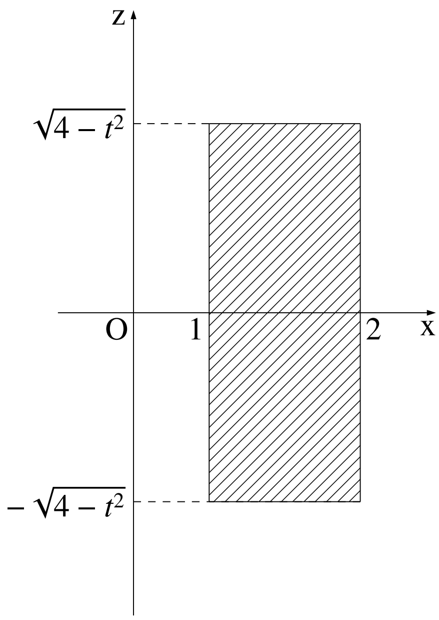


回転の中心より一番近い点は点 $(1, t, \pm\sqrt{1-t^2})$ で、一番遠い点は点 $(2, t, \pm\sqrt{4-t^2})$ となるよね (平面 $y = t$ で考えているので、y 座標は t ですよ)。

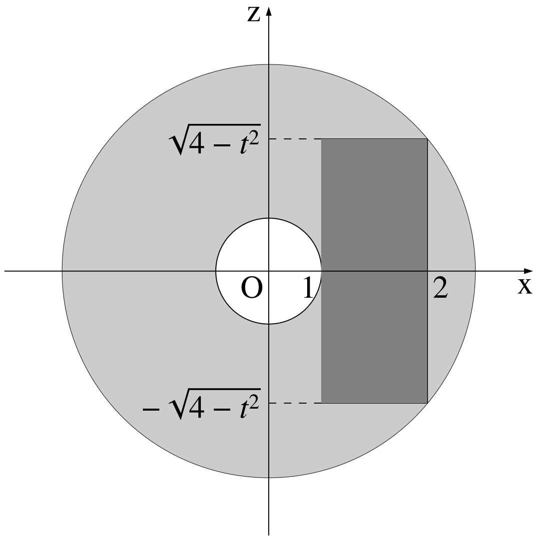
上図の円と円の間の斜線部が、回転体の切り口となるけど、これは簡単に面積を求めることができるよね。

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき求まったので、次に $1 \leqq t \leqq 2$ のときを考えます。このときも同じように考えたらできますよ。

このとき、x は $1 \leqq x \leqq 2$ で、z は $-\sqrt{4-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{4-t^2}$ です。これを図示すると



で、この部分を y 軸を中心として 1 回転させます。中心から一番遠い部分と近い部分が必要なんだよね。一番近い点は点 $(1, t, 0)$ です（中心から領域に垂線をおろせるときその部分が最小となる！）、最大となるところは点 $(2, t, \pm\sqrt{4-t^2})$ です (平面 $y = t$ で考えているので、y 座標は t ですよ。)

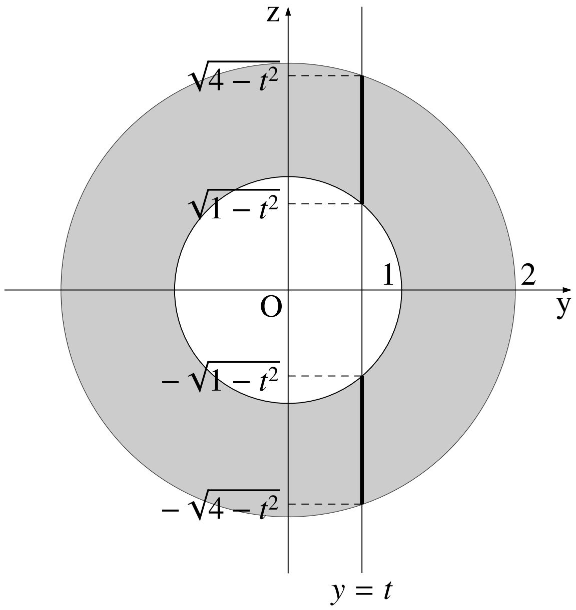


ここまできたら、平面 $y=t$ の切り口を $S(t)$ とでもして、$V=\int S(t)\,dt$ で求めていけば体積を求めることができます。それでは、解答に進みます。

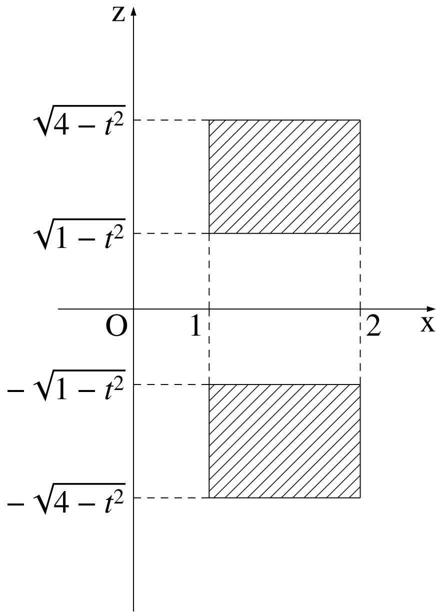
【問題（２）の解答】

立体 K_0 は $y \geqq 0$ の部分と $y \leqq 0$ の部分が対称である。よって、$y \geqq 0$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を 2 倍にしたものが、今回求める立体の体積と等しくなる。

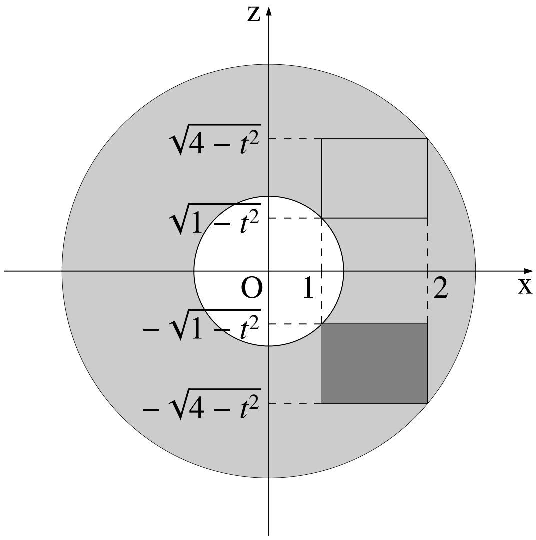
$0 \leqq t \leqq 1$ のとき



上図のようになるので、立体図形 K_0 を平面 $y = t$ で切断したときの切断面は以下のようになる。



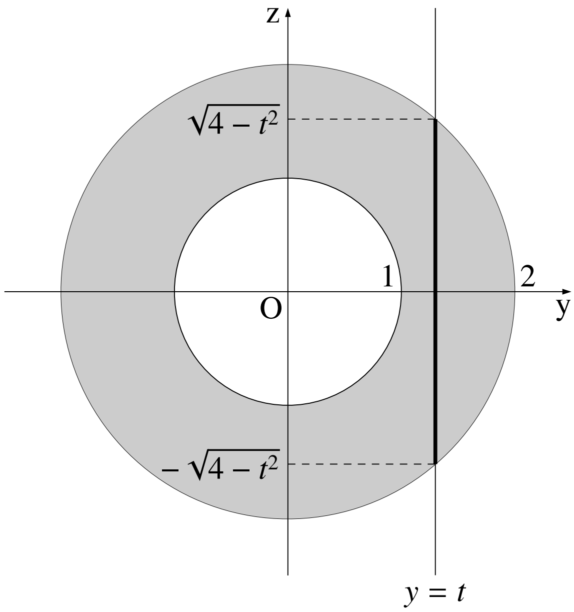
上記を y 軸のまわりに 1 回転させると、以下のようになる。



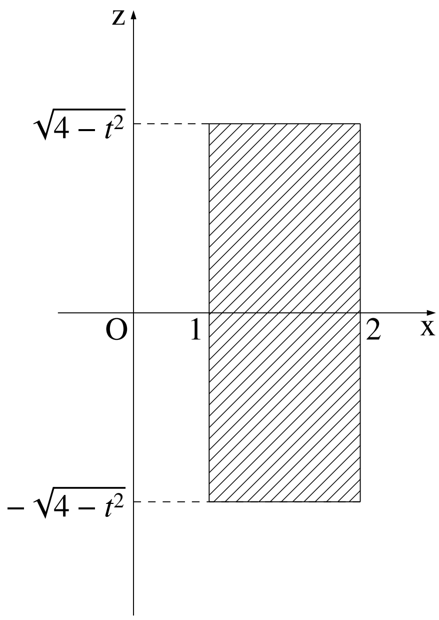
回転の中心より一番近い点は点 $(1, t, \pm\sqrt{1-t^2})$ で、一番遠い点は点 $(2, t, \pm\sqrt{4-t^2})$ となることより、上記斜線部の面積を $S_1(t)$ とすると

$$
\begin{aligned}
S_1(t) &= \pi\{2^2 + (\sqrt{4-t^2})^2\} - \pi\{1^2 + (\sqrt{1-t^2})^2\} \\
&= \pi(8-t^2) + \pi(2-t^2) \\
&= 6\pi
\end{aligned}
$$

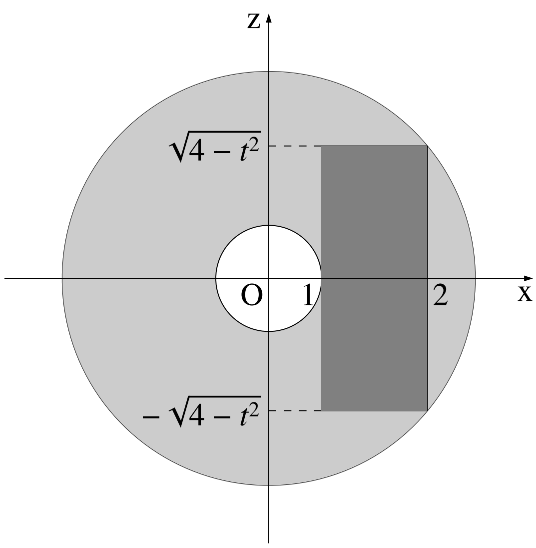
次に $1 \leqq t \leqq 2$ のときを考える。



上図のようになるので、立体図形 K_0 を平面 $y = t$ で切断したときの切断面は以下のようになる。



上記を y 軸のまわりに 1 回転させると、以下のようになる。



回転の中心より一番近い点は点 $(1, t, 0)$ で、一番遠い点は点 $(2, t, \pm\sqrt{4-t^2})$ となることより、上記斜線部の面積を $S_2(t)$ とすると

$$S_2(t) = \pi\{2^2 + (\sqrt{4-t^2})^2\} - \pi \cdot 1^2$$
$$= \pi(7 - t^2)$$

求める体積を V とする。対称性を考えて $V = 2\left\{\int_0^1 S_1(t)\,dt + \int_1^2 S_2(t)\,dt\right\}$ となる。

$$V = 2\left\{\int_0^1 S_1(t)\,dt + \int_1^2 S_2(t)\,dt\right\}$$
$$= 2\int_0^1 6\pi\,dt + 2\int_1^2 \pi(7-t^2)\,dt \quad (\because \quad S_1(t) = 6\pi, S_2(t) = \pi(7-t^2))$$
$$= 2\pi\Big[6t\Big]_0^1 + 2\pi\left[7t - \frac{1}{3}t^3\right]_1^2$$
$$= 2\pi \cdot 6 + 2\pi\left(14 - \frac{8}{3} - 7 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 12\pi + 14\pi - \frac{14}{3}\pi$$
$$= \boldsymbol{\frac{64}{3}\pi}$$

今回のような空間図形の体積を求める問題は苦手にしている人が多いです。もしかしたら、こういったタイプの問題ははじめて解いたという人もいるかもしれません。

ですが、一部の大学では頻出ですよ。これは、名古屋大学の過去問です。北大、東北大、筑波大などでは繰り返し、同じような問題が出題されています。

こういった大学を志望している人は、特に解けるようになっておいてくださいね。一見難しそうですが、慣れてくれば比較的簡単に解けるということが多いです。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司