「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x\sin 2t|\, dt$$

とおく。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ を求めよ。

【問題（１）の解説】

インテグラルの中身の被積分関数が絶対値を含んでいます。

こういった被積分関数に絶対値を含んだ問題は、実際の大学受験でもよく出題されますよ。解けるようになっておいてくださいね。

被積分関数が絶対値のままでは積分することはできません。だから、被積分関数に絶対値が含まれているときは、絶対値の中身が０以上のときと０以下のときとで場合分けをして、絶対値を外してから積分していくしかないです。

とりあえず絶対値の中身の正負を考えたいんだけど、このままでは考えることができません。

だから、とりあえず２倍角の公式を利用して、$\cos t - x\sin 2t = \cos t - 2x\sin t\cos t$ と変形をして解いていくね。

⇑ ２倍角の公式を使った根拠としては、三角関数で中身の角度がそろっていないと考えにくいからです。$\cos t$ と $\sin 2t$ と中身の角度は t と $2t$ です。そこで、２倍角の公式を使って中身の角度を統一しました。

まあ、２倍角の公式を使った根拠としては上記の通りです。ただ、絶対値を外すためにとりあえず式変形をしないといけません。で、今回の問題でできそうなこととしては、２倍角の公式を使うくらいです。だから、２倍角の公式を使ったと考えても OK です。

数学って、解ける前から「こうしたら解ける !! 」という根拠がないときも多いですよ。根拠がなくてもとりあえずやってみます。それで解けたら OK だし。それで、解けなかったら、その時点でまた別の解法を考えます。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x\sin 2t|\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - 2x\sin t\cos t|\,dt \quad \blacktriangleleft \text{ ２倍角の公式より！} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt \quad \left(\because \ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \cos t \geqq 0 \text{ より } |\cos t| = \cos t\right) \end{aligned}$$

とりあえず、ここまで変形をすることができました。で、ここからどうしようかな？と考えます。ここからは、① そのまま解く解法、② 置換積分を使った解法、の２通りが存在します。

まずは、① のそのまま解法で解いていきます。

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt$ と変形できたけど、絶対値の中身は $1 - 2x\sin t$ なんだよね。これが０以上か０未満かによって場合分けをしないといけません。

そのまま考えてもいいけど、グラフを使った考えるという方法があります。この解法は、正負を知りたいときによく使う解法です。知らない人も多いと思うけど、ぜひとも覚えておいてくださいね。

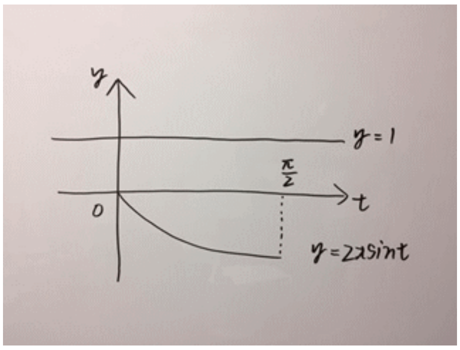
正負の調べ方

$h(x)$ の符号を調べるときに、$h(x) = f(x) - g(x)$ と変形をしてから、$y = f(x), y = g(x)$ の２つのグラフの上下関係で $h(x)$ の符号を調べる方法がある。

$y = f(x)$ のグラフの方が $y = g(x)$ のグラフよりも上側にあるとき、$f(x) > g(x)$ つまり $f(x) - g(x) > 0$ より $h(x) > 0$ となる。反対に、$y = f(x)$ のグラフの方が $y = g(x)$ のグラフよりも下側にあるとき、$f(x) < g(x)$ つまり $f(x) - g(x)$ より $h(x) < 0$ となる。

今回の場合、$1 - 2x\sin t$ の正負を調べたいんだけど、このとき $y = 1, y = 2x\sin t$ のふたつのグラフの上下関係でしらべていきます。今回の場合、変数は t です。また、積分区間が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より、t はこの範囲で考えます。

まず、$x < 0$ のとき、$y = 1$ と $y = 2x\sin t$ のグラフをかくと以下のようになります。



上図のとき、$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において、直線 $y = 1$ の方が、$y = 2x\sin t$ のグラフより常に上側にあるよね。

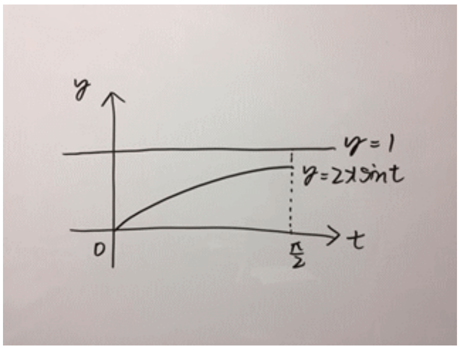
だから、$1 \geqq 2x\sin t$ です。
⇑ 厳密に言えば、$1 > 2x\sin t$ だけど、絶対値を外すのが目的。０以上かどうかなので、イコールを含んでも別に OK です。

少し細かいけど、$A \geqq B \iff$ 「$A > B$ または $A = B$」なので、$A > B$ のとき $A \geqq B$ を満たしています。今回の絶対値のようなとき、$A > B$ だけど $A \geqq B$ と書くこともよくありますよ。

$x = 0$ のときは、グラフにはかかないけど、このときも $y = 1$ と $y = 2x\sin t = 2x\sin 0 = 0$ の２つのグラフ（今回の場合、２つのグラフはともに直線）を見比べると、当然 $y = 1$ の

方が $y=0(=2x\sin t)$ のグラフよりも上側にあります。だから、$1 \geqq 2x\sin t$ です。

次に、$x>0$ で $2x \leqq 1$ つまり $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、グラフは以下のようになります。

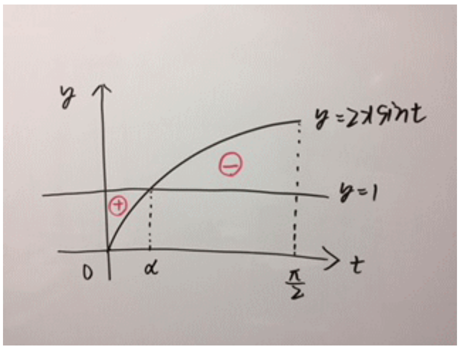


上図のとき、$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において、直線 $y=1$ の方が、$y=2x\sin t$ のグラフより常に上側にあります。だから、$1 \geqq 2x\sin t$ です。

ここまで、$x<0$ のとき、$x=0$ のとき、$0<x \leqq \dfrac{1}{2}$ のときの３つの場合を考えました。ですが、いずれにおいても、$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $1 \geqq 2x\sin t$ です。

この３つはひとつにすることができて、$x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $1 \geqq 2x\sin t$ となります。

最後に、$x>\dfrac{1}{2}$ のときです。このとき、$y=1$ と $y=2x\sin t$ のグラフをかくと以下のようになります。



２つのグラフは１点で交わります。その交点の t 座標を α とでもします。そうすると、

$0 \leqq t \leqq \alpha$ のとき $1 \leqq 2x\sin t$ で、$\alpha \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $1 \geqq 2x\sin t$ となります。

＊これで分かったと思うけど、一見複雑に思える正負の判断でもグラフの上下関係で考えていけば簡単に分かってしまうということがあります。今回もグラフで考えたらそこまで難しく無かったよね。

微分で増減表をかくときに $f'(x)$ の符号を調べる必要があります。そのときも、この２つのグラフの上下関係で考えるという方法は非常にパワフルなものになってきます。

有効な方法ですが、知らない人が多いみたいです。ぜひとも、覚えておいてくださいね。
それでは、解答に進みます。

【問題（１）の解答】

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x\sin 2t|\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - 2x\sin t\cos t|\,dt$$ ◀ ２倍角の公式より！

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt \quad \left(\because \ \ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \cos t \geqq 0 \text{ より } |\cos t| = \cos t\right)$$

(i) $x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において常に $1 - 2x\sin t \geqq 0$ となる。

⇑ 一応、グラフで考えました。グラフを答案にかいても当然 OK です。ただ、このくらいなら、省略して説明なしで OK です。上記のように突然「常に $1 - 2x\sin t \geqq 0$ となる」と書いてもらっていいですよ。

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1 - 2x\sin t)\,dt$$

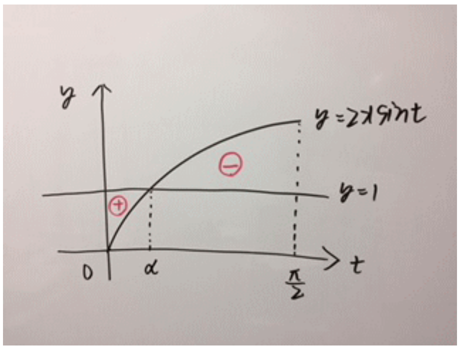
⇑ $1 - 2x\sin t \geqq 0$ より、$|1 - 2x\sin t| = 1 - 2x\sin t$ ！

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - 2x\sin t\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - x\sin 2t)\,dt$$ ◀ ２倍角の公式より、$2\sin t\cos t = \sin 2t$

$$= \left[\sin t + \frac{x}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - x$$

(ii) $x > \frac{1}{2}$ のとき



上図のように、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $y = 1$ のグラフと $y = 2x\sin t$ のグラフの共有点の t 座標を α とする。

$0 \leqq t \leqq \alpha$ のとき $1 - 2x\sin t \leqq 0$ となり、$\alpha \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $1 - 2x\sin t \geqq 0$ となる。
⇑ 場合分けの (i) では簡単なのでグラフはかきませんでした。ですが、この場合分け (ii) は複雑です。だから、グラフを使って説明をしました。

$2x\sin\alpha = 1$ より $\sin\alpha = \frac{1}{2x}$ となる。

⇑α は、２つのグラフ $y = 1$ と $2 = 2x\sin t$ のグラフの交点の t 座標なので、当然こうなるよね。問題を解くときに必要なので、求めておきました。

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt$$
$$= \int_0^{\alpha} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt$$
$$= \int_0^{\alpha} \cos t(1 - 2x\sin t)\,dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\{-(1 - 2x\sin t)\}\,dt$$

⇑$0 \leqq t \leqq \alpha$ のとき $1 - 2x\sin t \geqq 0$ となり、$\alpha \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $1 - 2x\sin t \leqq 0$ より！

$$= \int_0^{\alpha} (\cos t - x\sin 2t)\,dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t + x\sin 2t)\,dt$$ ◀ ２倍角の公式を使って整理した！

$$= \left[\sin t + \frac{x}{2}\cos 2t\right]_0^{\alpha} + \left[-\sin t - \frac{x}{2}\cos 2t\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sin\alpha + \frac{x}{2}\cos 2\alpha - \frac{x}{2} - \sin\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\cos\pi + \sin\alpha + \frac{x}{2}\cos 2\alpha$$

$= 2\sin\alpha + x\cos 2\alpha - 1$

$= 2\sin\alpha + 2(1 - 2\sin^2\alpha - 1)$

$\Uparrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ の 2 倍角の公式より！

$= 2 \cdot \dfrac{1}{2x} + x\left\{1 - 2\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2\right\} - 1 \quad \left(\because \ \sin\alpha = \dfrac{1}{2x}\right)$

$= \dfrac{1}{x} + x - \dfrac{1}{2x}$

$= \dfrac{1}{2x} + x - 1$

＊ここから、最小値を考えていきます。$x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $f(x) = 1 - x$ と減少関数です。だから、$f(x)$ の最小値は $x > \dfrac{1}{2}$ のときの最小値と一致します（厳密にいうと、$x > \dfrac{1}{2}$ において $f(x)$ が単調増加のとき $x = \dfrac{1}{2}$ で最小値となる可能性もあります）。

通常、最小値を求めるとき微分をして求めることが多いです。ただ、今回の場合相加相乗平均を使えますよ。もちろん、微分でも解けるけど相加相乗平均の方が簡単です。

分数関数のときは、相加相乗平均を使えることが多いです。いきなり、微分をするのではなく、相加相乗平均を使うことはできないかな？と考えるようにしてください。

$x > \dfrac{1}{2}$ のとき、$\dfrac{1}{2x} > 0, x > 0$ となる (← 両方とも正だから、相加相乗平均を使える)。

相加相乗平均より $\dfrac{1}{2x} + x \geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{2x} \cdot x} = \sqrt{2}$ となる。等号成立は $\dfrac{1}{2x} = x$ つまり $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときであり、$\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より、$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、$f(x)$ は最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2} - 1}$ をとる。

【問題（１）の別解について】

問題 1 は、そのまま解きました。ですが、置換をして解く方法もあります。まずは、以下の事柄を覚えておいてください。

置換積分について

$\displaystyle\int (\sin x\ のみの式)\cos x\,dx$ のとき、$\sin x = t$ と置換する。

$\displaystyle\int (\cos x\ のみの式)\sin x\,dx$ のとき、$\cos x = t$ と置換する。

＊上記を知らなかった人は覚えておいてくださいね。置換積分は、「このときはこうする」と決まりきったものがあります。で、その決まりきった解法は、覚えていないとその場で思いつくなんて絶対にムリですよ。しっかりと暗記しておいてください。

で、今回の問題は $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt$ と、$\displaystyle\int (\sin t\ のみの式)\cos t\,dt$ となっているよね。

だから、$\sin t = u$ とでも置換するとうまくいきます。

$\sin t = u$ の両辺を t で微分をすると $\cos t = \dfrac{du}{dt}$ より $dt = \cos u\,du$ です。

また、積分区間は $t = 0$ のとき $u = \sin 0 = 0$ となり、$t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $u = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ となります。

よって、$f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t|1 - 2x\sin t|\,dt = \int_0^1 |1 - 2xu|\,du$ と変形できます。

ここからは先ほどと同じく場合分けをして解いていきます。$x < \dfrac{1}{2}$ と $x \geqq \dfrac{1}{2}$ で場合分けです。置換で解いても当然答えは同じになります。少し考えたら解けると思うので、解答は省略しておきます。各自解いておいてくださいね。

【問題（２）の解答】

＊これは（１）で求めた結果を使って解くだけ。単なる、付け足しのような問題です。受験では、こういう出題の仕方がよくありますよ。

（１）より、$f(x)=\begin{cases}1-x \\ x+\dfrac{1}{2x}-1\end{cases}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x+\frac{1}{2x}-1\right)dx$$
$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{\log x}{2}-x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2}$$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司