「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

点 $P(x, y)$ が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の上を動くとき、$3x^2-16xy-12y^2$ の値の最大値と、最大になる点 P の座標を求めよ。

【問題の解説】

今回は、「$3x^2-16xy-12y^2$ の最大値を求めよ」です。これがもし、$x+y$ の最大値を求めよだとしたら、$x+y=k$ とでもして、楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $x+y=k$ が共有点をもつような k の値の範囲とでもして解いていきます。

ただ、今回の場合 $3x^2-16xy-12y^2$ です。$3x^2-16xy-12y^2=k$ とでもしても、$3x^2-16xy-12y^2=k$ のグラフなんてよく分からないよね。だから、以下の楕円の媒介変数表示を使って解く解法で解いていきます。

楕円の媒介変数表示

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点は、$(x, y)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$ となる。

＊楕円の媒介変数表示は上記の通りです。ただ、θ について覚えておかないといけないことがあります。

ユーチューブで解説しています。興味のある人は見ておいてください。

楕円の媒介変数表示の注意点：https://youtu.be/FPHTqW3c6Bk

今回の場合、楕円の媒介変数表示は $(x, y) = (2\cos\theta, \sin\theta)\ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおけます。ここからは、三角関数の最大値・最小値問題です。

$a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ には決まった解き方があったよね。もし、忘れていた人は、以下のプリントで復習をしておいてください。

三角関数の最大値・最小値問題の解説プリント https://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf

【問題の解答】

点 $P(x, y)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点より、$x = 2\cos\theta, y = \sin\theta\ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおける。

⇑ $0 \leqq \theta < 2\pi$ で、楕円上のすべての点をあらわすことができます。θ には範囲があったほうが考えやすいので、θ の範囲を設定しました。

$3x^2 - 16xy - 12y^2$

$=3(2\cos\theta)^2 - 16 \cdot 2\cos\theta \cdot \sin\theta - 12(\sin\theta)^2 \quad (\because \quad x = 2\cos\theta, y = \sin\theta)$

$=12\cos^2\theta - 32\sin\theta\cos\theta - 12\sin^2\theta$

$=12 \cdot \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} - 32 \cdot \dfrac{\sin 2\theta}{2} - 12 \cdot \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

⇑ 2 倍角の公式を少し変形して $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}, \sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}, \cos 2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ を代入した！

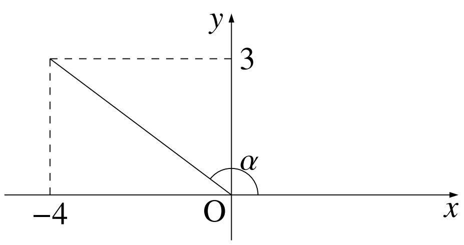
三角関数で $a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ の形がきたら、こう解くのが決まりごとです。

$=6 + 6\cos 2\theta - 16\sin 2\theta - 6 + 6\cos 2\theta$

$= -16\sin 2\theta + 12\cos 2\theta$

$=4(-4\sin 2\theta + 3\cos 2\theta)$

＊ $a\sin\theta + b\cos\theta$ の形がきたら三角関数の合成をします。今回は、具体的な角が求まらないタイプです。



上図のような、$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}, \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ をみたす α がただひとつ存在する。

$3x^2 - 16xy - 12y^2$
$=4(-4\sin 2\theta + 3\cos 2\theta)$
$=4 \cdot 5\sin(2\theta + \alpha)$ ◀ 三角関数の合成をした！
$=20\sin(2\theta + \alpha)$

＊ $-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より、最大値は２０であることがわかりました。当然 $\sin(2\theta+\alpha) = 1$ となるとき最大です。後はここから x, y の値を求めていきます。θ や α の値の範囲に気を付けて解かないとダメですよ。丁寧に解くようにしてください。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $0 \leqq 2\theta < 4\pi$ となる。すべての辺に α を加えると $\alpha \leqq 2\theta + \alpha < 4\pi + \alpha$ となる。

ここで、$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であることを考えると $\sin(2\theta + \alpha) = 1$ となるのは、$2\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi, \dfrac{9}{2}\pi$ のときである。
＊この部分に気を付けてくださいね。$\sin(2\theta + \alpha) = 1$ となるのは $2\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ のときなんだよね。

この中で $\alpha \leqq 2\theta + \alpha < 4\pi + \alpha$ を満たしているものは、$n = 1, 2$ のときの $\dfrac{5}{2}\pi, \dfrac{9}{2}\pi$ の２つです。

間違えやすいです。このあたりを丁寧に解くようにしてくださいね。

＊問題を解いていけば分かります。$\sin\dfrac{\alpha}{2}, \cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値が必用になるので、まずこれらの値を求めておきます。半角の公式で求めていきますよ。α の範囲に気を付けて符号には気をつけてくださいね。

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \text{◀ 半角の公式より！}$$
$$= \frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2} \quad \left(\because \quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{9}{10}$$
$$\sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ となる。このとき、$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ である。

よって、$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad \textcolor{red}{\blacktriangleleft\ \text{半角の公式より！}} \\
&= \frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2} \quad \left(\because\ \ \cos\alpha = -\frac{4}{5}\right) \\
&= \frac{1}{10} \\
\cos\alpha &= \pm\frac{1}{\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ となる。このとき、$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$ である。

よって、$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

＊ $2\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi, \dfrac{9}{2}\pi$ のときの 2 パターンがあるので、それぞれ求めていきます。

(i) $2\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi$ のとき

$2\theta + \alpha = \dfrac{5}{2}\pi$ を θ で解くと $\theta = \dfrac{5}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ となる。

$$\begin{aligned}
x &= 2\cos\theta \\
&= 2\cos\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{5}{4}\pi\sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad \textcolor{red}{\blacktriangleleft\ \text{加法定理で展開をした！}} \\
&= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \quad \left(\because \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\
&= 2\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) \\
&= -\frac{4}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sin\theta \\
&= \sin\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \sin\frac{5}{4}\pi\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{5}{4}\pi\sin\frac{\alpha}{2} \quad \blacktriangleleft \text{加法定理で展開をした！} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \left(\because\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{3}{2\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

(ii) $2\theta + \alpha = \dfrac{9}{2}\pi$ のとき

$2\theta + \alpha = \dfrac{9}{2}\pi$ を θ で解くと $\theta = \dfrac{9}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ となる。

$$
\begin{aligned}
x &= 2\cos\theta \\
&= 2\cos\left(\frac{9}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{9}{4}\pi\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{9}{4}\pi\sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad \blacktriangleleft \text{加法定理で展開をした！} \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \quad \left(\because \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sin\theta \\
&= \sin\left(\frac{9}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \sin\frac{9}{4}\pi\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{9}{4}\pi\sin\frac{\alpha}{2} \quad \blacktriangleleft \text{加法定理で展開をした！} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \left(\because\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{3}{2\sqrt{5}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

以上より、$(x, y) = \boldsymbol{\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$ のときに、最大値 **20** をとる。

この問題は計算が少し煩雑でした。ですが、やっていることとしては簡単です。簡単というか、「このときはこうする！」という解法さえ覚えていれば、何も考えることなく解ける問題です。

この問題は、「福島県立医科大学」の過去問（問題は少しだけ変更しました）です。この大学は、数学の問題が難しいで有名な大学です。こういった難しい問題でも、しっかりと解法さえ覚えていればごくごく簡単に解けてしまいます。

医学部などの難関大学を目指す人でも、まずは基本的な典型問題を徹底して解法を覚えてください。そうして、はじめて難しい問題も解けるようになりますよ。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法

https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司