

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

以下の問いに答えよ。

(1)  $(\tan x)' - 1 = \tan^2 x$  を示せ。

(2) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$  を求めよ。

(3) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx$  を求めよ。

【問題 (1) の解答】

\*微分を含んだ等式の証明です。「微分の定義を使うのかな？」と思いますが、問題文で「定義を用いて」と書かれていない限り、基本的に定義は使わなくて OK です。 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  の公式を使ってもらって大丈夫です。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (\tan x)' - 1 \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad (\because 1 - \cos^2 x = \sin^2 x) \\ &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 \\ &= \tan^2 x = (\text{右辺})\end{aligned}$$

よって、 $(\tan x)' - 1 = \tan^2 x$  が成立する。(証明終)

## 【問題（２）の解説】

微分の反対が積分です。だから、積分はどんな関数でもできている人が多いです。

でも、高校数学の範囲で積分ができる関数ってかなり限られているんです。今回のような、 $\tan^2 x$ のような簡単（に見える）な関数でも、何も知識がなければ解くことはできません。

今回は、（１）が誘導となってくれています。

\*（１）の誘導がなければ解くのは難しいですよ。たまに、「この問題は（１）の誘導なしでも解けないとダメですか？」と質問をされます。でも、これは解けなくてOKですよ。これが問題として出てくるときは、ほぼ間違いなく（１）のヒントが与えられています。

## 【問題（２）の解答】

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(\tan x)' - 1\} \, dx \quad (\because (1) \text{ より } \tan^2 x = (\tan x)' - 1) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \quad \blacktriangleleft \text{【注1】を見よ！} \\ &= \left[ \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[ x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \blacktriangleleft \text{【注2】を見よ！} \\ &= \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 - \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

### 【注1】について

まず、言葉の話しから  $\int f(x) \, dx$  のように積分される関数  $f(x)$  を 被積分関数 と言います。

被積分関数が1のとき  $\int 1 \, dx$  と書いてもOKです。でも、 $\int dx$  と何も書かない方が一般的ですよ。

【注2】について

$\int_a^b \{f(x)\}' dx = \left[ f(x) \right]_a^b$  です。少し分かりにくいけど、しっかりと理解してね。 $\{f(x)\}'$  を積分したら  $f(x)$  となりますよ。

\*厳密に言えば、 $\int \{f(x)\}' dx = f(x) + C$  と積分定数を考えないといけません。でも、定積分のときは不定積分は考えなくていいんだったんだよね。だから、上記のように考えてもらってOKです。

これに従うと、 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' dx = \left[ \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$  です。

### 【問題（3）の解答】

\*これも（1）の結果を使って解いていきます。うまい具合に部分積分できる形になってくれます。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \{(\tan x)' - 1\} dx \quad (\because (1) \text{ より } \tan^2 x = (\tan x)' - 1) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx \end{aligned}$$

\*ここから、左側の定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx$  と右側の定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$  を別々に計算していきます（慣れてきたらわざわざ分けなくてもいいですよ。ただ、最初のうちは、分けた方がわかり易いと思います）。

左側の  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx$  は部分積分を使える形になってくれています。

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx \\
&= \left[ x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x' \tan x dx \quad \blacktriangleleft \text{部分積分より!} \\
&= \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} - 0 \cdot \tan 0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \left[ \log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \blacktriangleleft \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \text{ の公式より!} \\
&= \frac{\pi}{4} + \log \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| - \log |\cos 0| \\
&= \frac{\pi}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\text{よって、} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi^2}{32}$$

この問題は、佐賀大学の過去問です。

国立大学の問題としては、比較的簡単な問題です。ただ、積分の意味をしっかりと理解していないと間違えてしまったという人も多いと思います。

積分は、しっかりと理解しておかないとなかなか問題は解けないですよ。中途半端に勉強をするのではなく、しっかりと理解しておいてくださいね。

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています  
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法  
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法  
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）  
[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司