「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a を 1 以上の実数、b を正の実数とする。

(1) 0 以上のすべての実数 x について、不等式 $e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つための、a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし、e は自然対数の底とする。

(2) a, b が (1) で求めた範囲を動くとき、定積分 $\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+2b}\,dx$ の値を最小にする a, b と、その最小値を求めよ。

＊２００４年の北海道大学の過去問です。難易度としては、それほど難しいわけではありませんが、(２) は「１文字を固定して考える」という考えが必要になりますし、計算も複雑です。北海道大学の問題の中でも難しめの問題です。

【問題（１）の解答】

＊これは、簡単な問題です。0 以上のすべての実数 x で、$e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つには、$f(x) = e^x - a(x+2b)$ とでもして $f(x)$ の最小値が 0 以上であるという方法で証明します。

$f(x) = e^x - a(x+2b)$ とする。

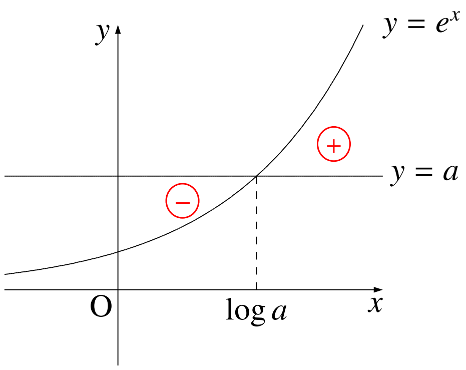
$$f(x) = e^x - a(x+2b)$$
$$f'(x) = e^x - a$$

(注) これから $f'(x) = e^x - a$ の正負を調べていきます。このくらいなら別にグラフをかく必要はないかもしれないですけど、今後のことも踏まえてグラフをかきます。

微分は正負を知ることが目的です。その正負って複雑なものになればなかなか判断ができなくなります。そういったときは、$f'(x) = g(x) - h(x)$ の形になおします。

それで、$y = g(x)$ と $y = h(x)$ の 2 つのグラフを同じところにかいて、$y = g(x)$ のグラフの方が $y = h(x)$ のグラフより上側にあるところでは $g(x) > h(x)$ つまり $g(x) - h(x) > 0$ となるので $f'(x) > 0$ となります。

反対に $y = g(x)$ のグラフの方が $y = h(x)$ のグラフよりも下側にある範囲では $g(x) < h(x)$ より $g(x) - h(x) < 0$ となるので、$f'(x) > 0$ となります。



＊ $f'(x) = e^x - a$ は $y = e^x$ のグラフの方が $y = a$ のグラフより上側にあるところで $f'(x) > 0$、反対に下側にあるところでは $f'(x) < 0$

上図のようになるので $0 < x < \log a$ で $f'(x) < 0, \log a < x$ で $f'(x) > 0$ となります。

このようにグラフをかくことで、$f'(x)$ の正負は視覚的に判断できるので数式で考えるよりも楽になります。

先ほども言いましたが、今回の問題くらいでは数式で考えても楽に考えられると思いますが、難しくなるとこのグラフの考え方を理解しておかないと解けない問題も出てきます。

重要な考えなので、しっかりと理解しておいてください。

x	0		$\log a$	
$f'(X)$		$-$	0	
$f(X)$		↘	$f(\log a)$	↗

$x \geqq 0$ で増減表を書くと上記のようになる。よって、$x = \log a$ で $y = f(x)$ は極小かつ最小となる。

$f(\log a) = a - a(\log a + 2b)$

$f(x)$ が 0 以上のすべての x で $f(x) \geqq 0$ が成立するとき、$f(x)$ の最小値が 0 以上である。

$a - a(\log a + 2b) \geqq 0$ ここで、$a > 0$ より両辺を a で割ると $\mathbf{1 - \log a - 2b \geqq 0}$ となる。

【問題（２）の解説】

$\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$ の値を … という問題です。でも、まず $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$ の計算ができるので、とりあえずこの定積分の計算をすることにします。

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{(x+2b)'}{x+2b}\,dx$$
$$= \Big[\log(x+2b)\Big]_0^1 \quad \blacktriangleleft \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| \text{ より}$$
$$= \log(1+2b) - \log(2b)$$

とりあえず、このように定積分の計算ができたので、

$\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx = \frac{1}{ae^b}\{\log(1+2b) - \log(2b)\}$ というふうにすることができました。

ここからの求め方がポイントなんです。

今回の問題は変数がa, bの２つあります。２変数関数の最大値、最小値問題は変数を１つにしてから解いていくというのが基本です。

そこで、変数を１つにできるかな？と探していくんですけど、今回の問題ではちょっとできそうにない。

なぜかというと、例えば$a+b=1$なんかという関係式があれば$b=1-a$などとして代入することによって１変数にすることができます。でも、今回の問題ではaとbの等式が与えられていない！よって、この変形はできない…

そこで、２変数を１変数にする手法は同次式なんかも考えられるけど、どうもできそうにない…

同次式について知りたい人は、以下のページを見てください。
http://www.hmg-gen.com/situmon/tsuugaku12/12-2.html

他にも、何種類か２変数を１変数にする手法はあるかもしれないけど、今回の問題は２変数を１変数にすることは無理なんです。ですから、２変数のまま解いていかないといけません。

２変数関数の最大値、最小値問題では１文字を固定して考えるというのがよく使われる手法です。少し難しいので、問題を解きながら説明をしていきます。

先ほどの定積分の計算で、与式は$\dfrac{1}{ae^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}$と変形をすることができました。

ここから、１文字固定の考えを使っていくのですが、１文字固定とは簡単に言うと、どちらかの文字を定数とみなすことです。２変数関数は、変数が２つあるから考えにくいんです。でも、１文字固定して、一方の文字を定数と考えると２変数関数は１変数関数とみることができるよね？

今回は、変数がa, bのふたつがあります。どちらの文字を固定するかをまず考えないと

いけませんが a を固定して、b のみの式と考えると、$\dfrac{1}{ae^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}$ は考えにくいです。

で、b を固定して、a のみの式とすると $\dfrac{1}{ae^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}$ は簡単な関数です。

(注) 上記では理解しにくいという人もいると思います。どういうことを言っているかというと、x の関数とすると $f(x)=\dfrac{1}{ae^x}\{\log(1+2x)-\log(2x)\}$ と $f(x)=\dfrac{1}{xe^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}$ のどっちのグラフの方が考えやすいですか？ということです。

明らかに後の $f(x)=\dfrac{1}{xe^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}$ の方が考えやすいよね？これは b を固定して a を変数とみなした式です

$f(a)=\dfrac{1}{e^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}\cdot\dfrac{1}{a}$ となります。で、これがどんなグラフになるかというと $b>0$ という条件があるので $\dfrac{1}{e^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}>0$ です。ということは、$y=f(a)$ のグラフは $y=\dfrac{1}{a}$ のグラフと似たような形になります。

問題文に与えられた条件と、(1) で求めた結果により $a \geqq 1, \log a \leqq 1-2b$ という関係式があります。これを a について整理すると $1 \leqq a \leqq e^{1-2b}$ になります。$\Leftarrow$ b は定数ということに注意して下さい

$y=f(a)$ のグラフは $y=\dfrac{1}{a}$ のグラフと同じく、単調減少です。だから、$1 \leqq a \leqq e^{1-2b}$ では、$a=e^{1-2b}$ のとき最小となります。

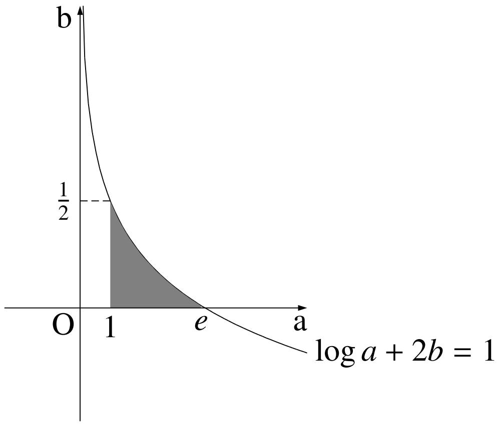
$$
\begin{aligned}
f(e^{1-2b}) &= \frac{1}{e^{1-2b}e^b}\log\frac{2b+1}{2b} \\
&= e^{b-1}\log\frac{2b+1}{2b}
\end{aligned}
$$

上記のようになります。これで、与式が b のみの関数となりました。後は、b を変数として $e^{b-1}\log\dfrac{2b+1}{2b}$ の最小値を求めれば問題終了です。

＊少し砕けた表現を使うと、1 文字固定法は「最小値の最小値が、元の関数の最小値」で、「最大値の最大値が、元の関数の最大値」です。

今から $e^{b-1}\log\dfrac{2b+1}{2b}$ の最小値を求めたいのですが、まずは b の値の範囲を求めておきたいと思います。問題文に b は正の実数とあるので $b>0$ は当然言えます。後 $a \geqq 1$ というのも与えられています。

$b>0$ かつ $a \geqq 1$ かつ $1-\log a-2b \geqq 0$ を図示すると、次のようになります。



上図より、b の値の範囲は $0<b \leqq \dfrac{1}{2}$ となります。

後は、この範囲における $e^{b-1}\log\dfrac{2b+1}{2b}$ の最小値を求めれば、問題は終了です。ここからは、計算が少しややこしいですが単に微分をするだけの問題です。

それでは、解答に進みます。

【問題（２）の解答】

$\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x+2b}\,dx$ の最小値を求める。

ここで、

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x+2b)'}{x+2b}\,dx$$
$$=\Big[\log(x+2b)\Big]_0^1$$ ◀ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ より
$$=\log(1+2b)-\log(2b)$$

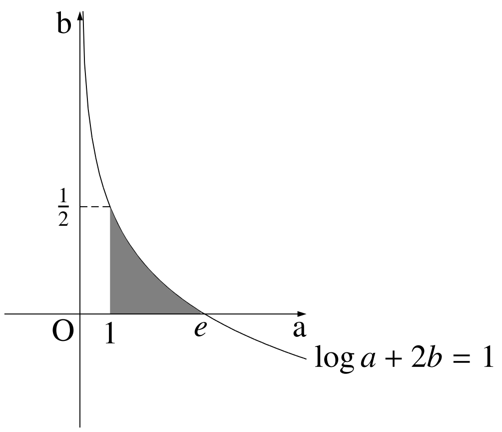
よって、与式は $\frac{1}{ae^b}\{\log(1+2b)-\log(2b)\}$ となる。

b を固定して考えると $a \geqq 1,\ b > 0,\ 1-\log a - 2b \geqq 0$ より、$1 \leqq a \leqq e^{1-2b}$ となる。

ここで、$g(a) = \frac{1}{ae^b}\log\frac{2b+1}{2b}$ とする。$b>0$ より $\frac{1}{e^b}\log\frac{2b+1}{2b} > 0$ より $a>0$ で $g(a)$ は単調減少。よって、$g(a)$ は $a=e^{1-2b}$ で最小となる。

$$g(e^{1-2b}) = \frac{1}{e^{1-2b}\cdot e^b}\log\frac{2b+1}{2b}$$
$$= \frac{1}{e^{1-b}}\log\frac{2b+1}{2b}$$
$$= e^{b-1}\Big\{\log(2b+1)-\log(2b)\Big\}$$

ここで、$a \geqq 1,\ b>0,\ \log a + 2b \leqq 1$ を図示すると以下の通り。



上図より、$0 < b \leqq \dfrac{1}{2}$ となる。

$h(b) = e^{b-1}\left\{\log(2b+1) - \log(2b)\right\}$ とする。

$$
\begin{aligned}
h'(b) &= e^{b-1}\left\{\log(2b+1) - \log(2b)\right\} + e^{b-1}\left(\frac{2}{2b+1} - \frac{2}{2b}\right) \\
&= e^{b-1}\left\{\log(2b+1) - \log(2b) + \frac{2}{2b+1} - \frac{1}{b}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで $e^{b-1} > 0$ より、$h'(b)$ の符号は $\log(2b+1) - \log(2b) + \dfrac{2}{2b+1} - \dfrac{1}{b}$ の符号と一致する。

以下、$i(b) = \log(2b+1) - \log(2b) + \dfrac{2}{2b+1} - \dfrac{1}{b}$ として、$i(b)$ の符号を考える

(注) 微分して知りたいのは $f'(x)$ の符号だけです。だから、微分をして符号に影響しないものはどんどん外して考えていきます。

今回は 1 階微分では正負を判断できません。そういったときはもう一度微分をします。絶対とは言いませんが、そういった場合単調増加や単調減少になっている場合が多いです。

$$
\begin{aligned}
i(b) &= \log(2b+1) - \log(2b) + \frac{2}{2b+1} - \frac{1}{b} \\
i'(b) &= \frac{2}{2b+1} - \frac{2}{2b} - \frac{4}{(2b+1)^2} + \frac{1}{b^2} \\
&= \frac{-2b^2+3b+1}{(2b+1)^2 b^2}
\end{aligned}
$$

ここで、$-2b^2 + 3b + 1 = -2\left(b - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{17}{8}$ より $0 < b \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、$-2b^2 + 3b + 1 > 0$ となる。

$\Uparrow i'(b) = -2b^2 + 3;+1$ の符号を調べたいだけ。$0 < b \leqq \dfrac{1}{2}$ では $b = 0$ のときの値よりも、$i(b)$ は大きくなります。

よって、$i'(b) = \dfrac{-2b^2+3b+1}{(2b+1)^2 b^2} > 0$ より $i(b)$ は単調増加。$i(b)$ は $b = \dfrac{1}{2}$ のとき最大とな

る。

$i\left(\frac{1}{2}\right) = \log(1+1) - \log 1 + \frac{2}{2} - 2 = \log 2 - 1 < 0$ より、$0 < b \leqq \frac{1}{2}$ で常に $i(b) < 0$ である。

また、$h'(b)$ と $i(b)$ の符号は一致するので、$0 < b \leqq \frac{1}{2}$ で常に $h'(b) < 0$。よって、$h(b)$ は単調減少。

$h(b)$ は単調減少なので、$b = \frac{1}{2}$ のときに最小となる。

このとき、最小となり、定積分 $\frac{1}{ae^b}\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$ の最小値は $h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\log 2 = \frac{\log 2}{\sqrt{e}}$ である。

＊あとは、a の値を求めたら終わりです。

$a \geqq 1$ かつ $\log a + 2b \leqq 1$ である。$b = \frac{1}{2}$ のとき $\log a + 1 \leqq 1$ つまり $a \geqq 1$ となる。$a \leqq 1$ かつ $a \geqq 1$ より $a = 1$

以上より、$\boldsymbol{a = 1, b = \frac{1}{2}}$ のとき、定積分 $\frac{1}{ae^b}\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$ は最小値 $\boldsymbol{\frac{\log 2}{\sqrt{e}}}$ をとる。

今回の問題はどうだったでしょうか？計算式自体はかなり複雑だったかもしれませんが、やっている事柄としては簡単なものです。

この問題でポイントとなるのは、「1 文字固定」です。知らない人も多いですが、よく出てくる手法なのでしっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています

https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司