「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

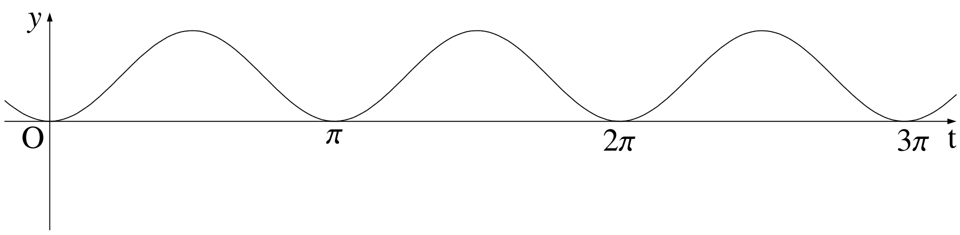
実数 x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

【問題（１）の解説】

「どうやって考えていこう？」と考えるけど、三角関数の場合周期性があることが多いですよ。

だから、こういった問題を見たときには「何か周期性はないかな？」と考えられるようになっておいてください。

で、今回の場合 $y = \sin^2 t$ のグラフは以下のようになります。



⇑$y = \sin^2 t$ のグラフは、$y = \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ となるので上記のようになりますよ。グラフは π を周期としています。

また、$|\sin t|$ の方も $y = |\sin t|$ のグラフを考えると分かりますが、π を周期としています。

以上より、$f(x)$ は π 周期であることを予想できます。ただ、いきなり使っては減点される可能性があるので、証明してから使っておいた方が無難です。

ちなみに、周期関数の証明は以下のようにします。

周期関数について

関数 $f(x)$ が、$f(x) = f(x+a)$ が成立するとき、関数 $f(x)$ の周期は a である。

＊今から、$f(x)$ の周期が π であることを示します。$f(x) = f(x+\pi)$ が言えたら、$f(x)$ の周期は π です。

$$f(x) = \int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$f(x+\pi) = \int_{(x+\pi)}^{(x+\pi)+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$\Uparrow$ $f(x+\pi)$ は $f(x)$ で x のところを $x+\pi$ に置き換えた！複雑な式でも置き換えるだけ、同じです !!

$$= \int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

＊ここから、上記が $f(x)$ と等しくなるということを示さないといけません。こういうときは、積分区間からやっていくことが多いです。

どういうことかと言えば、当たり前だけど $f(x) = f(x+\pi)$ となるとき、積分区間は一致するよね（左辺と右辺のすべては一致する。当然、積分区間も一致します）。

とりあえず、積分区間を一致するように置換します。今回の場合 $u = t - \pi$ とします。そうすると、積分区間が一致します。

等式の証明です。積分区間が一致するようにすると、他の部分も一致してくれて証明終了です。こういう積分を含んだ等式の証明は、積分区間が一致しるように置換するということが多い、ということを覚えておいてください。

$u = t - x$ とする。

t	$x+\pi \to x+\frac{3}{2}\pi$
θ	$x \to x+\dfrac{\pi}{2}$

また、$u = t - x$ の両辺を u で微分をすると

$1 = \dfrac{dt}{du}$ つまり $dt = du$
⇑ 今回変数なのは u と t で、x は定数です。定数を微分すると 0 になります。

$$
\begin{aligned}
f(x+\pi) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u+\pi)|}{1+\sin^2(u+\pi)}\,du \\
&= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|-\sin u|}{1+(-\sin u)^2}\,du \quad (\because \quad \sin(u+\pi) = -\sin u) \\
&= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}\,du
\end{aligned}
$$

⇑ 上記の $|-\sin u| = \sin u$ となるのは大丈夫だよね。丁寧にするとすると、絶対値の整式 $|AB| = |A||B|$ を使っているだけです。

$-A = (-1)\times A$ です。$|-A| = |(-1)|\times|A|$ と先ほどの絶対値の性質より変形できます。また、$|-1| = 1$ より $|-1||A| = |A|$ です。

これより $|-A| = |A|$ が言えます。だから、$|-\sin u| = |\sin u|$ が成立します。

「何、当たり前のこと言ってんの？」なんて感じる人もいます。ただ、意外に理解できずにテキトウに解いている人が多いので念のため丁寧に話しておきました。

で、これまでで $f(x+\pi)\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}\,du$ と言えました。u の部分は t で置き換えてもよいので、$f(x+\pi)\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}\,du = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ が成立します。
⇑ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ です。面積で考えても一致することは当たり前だし、$x = t$ と置換しても積分区間はまったく同じ、$dx = dt$ より当選イコールが成立します。

このことは証明なしでいきなり使ってもらった OK です。

以上で、$f(x) = f(x+\pi)$ が言えたので $f(x)$ の周期が π であることを示せました。

$f(x)$ の周期が π であることがわかりました。ここから $f(x)$ の最大値と最小値を求めていきます。

周期が π なので、x の範囲の取り方はいろいろとあります。ですが、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とします。

＊周期関数の有名な例としては、$\sin x$ や $\cos x$ の周期は 2π だよね。例えば $\sin^2 x + 2\sin x + 3$ の最大値・最小値を求めよときたとき、$0 \leqq x < 2\pi$ として考えていくことが多かったよね。

でも、これは別に $0 \leqq x < 2\pi$ でなくても、$\pi \leqq x < 3\pi$ としても OK です。周期関数だから、$3\pi - \pi = 2\pi$ で大きい方と小さい方との差が 2π のとき、1 周期分があるので、どこでも OK です。

今回の場合、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ としますが、$0 \leqq x \leqq \pi$ なんかでも答えは同じです。

それでは $f(x)$ の最大値と最小値を求めていきます。関数の最大値・最小値を求めるときは $f(x)$ を微分して増減表を書いて求めることが多かったよね。

今回は複雑な関数ですが、やることをしては同じですよ。まずは、以下の公式を覚えてください。

微分の公式

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

この微分の公式を使うと

$$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'\frac{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-x'\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}\\
&=\frac{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x} \quad \blacktriangleleft \left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=1,\ x'=1\\
&=\frac{|\cos x|}{1+\cos^2 x}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x} \quad \blacktriangleleft \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \text{ より}
\end{aligned}$$

で、ここから計算をしていきます。絶対値が含まれていると考えにくいので $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq 0$ のときと $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のときと、で場合分けをして考えていってもらってもいいです。

ですが、場合分けをすると同じようなことを 2 回しないといけないので少しメンドウです。今回の場合、絶対値のまま考えていくことにします。

知っている人も多いと思いますが、念のため絶対値についてまとめておきます。

絶対値の性質

① $|AB|=|A||B|$

② $\left|\frac{B}{A}\right|=\frac{|B|}{|A|}$

③ $|-A|=|A|$

④ $|A|^2=A^2$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{|\cos x|}{1+\cos^2 x} - \frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x} \\
&= \frac{|\cos x|}{1+|\cos x|^2} - \frac{|\sin x|}{1+|\sin x|^2} \quad \blacktriangleleft\ \sin^2 x = |\sin x|^2, \cos^2 x = |\cos x|^2 \text{ より！} \\
&= \frac{|\cos x|(1+|\sin x|^2) - |\sin x|(1+|\cos x|^2)}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)} \quad \blacktriangleleft\ \text{通分をした！} \\
&= \frac{|\cos x| + |\sin x|^2|\cos x| - |\sin x| - |\sin x||\cos x|^2}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)} \\
&= \frac{|\cos x| - |\sin x| - |\sin x||\cos x|(|\cos x| - |\sin x|)}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)} \quad \blacktriangleleft\ |\cos x| - |\sin x| \text{ が共通因数！因数分解できる !!} \\
&= \frac{(|\cos x| - |\sin x|)(1 - |\sin x||\cos x|)}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)}
\end{aligned}
$$

＊今回は途中で $\sin^2 x = |\sin x|^2$ と変形しました。これは、少し気付きにくいと思います。絶対値がないものに、絶対値をつける変形なんて普通はあまりしないよね。

思いつくポイントとしては、「絶対値をつけたら因数分解できるから」です。絶対値なしで解いていきます。そして、「ああ、これは絶対値があれば因数分解できるな。だから、絶対値を付けておこうか」なんて感じで気づきます。

かなりややこしい計算ですが、とりあえずここまできました。$|\sin x||\cos x| = |\sin x \cos x|$ と絶対値の性質で変形できるよね。

ここで、さらに 2 倍角の公式を使うと $1 - |\sin x||\cos x| = 1 - \frac{1}{2}|\sin 2x|$ です。このとき $1 - \frac{1}{2}|\sin 2x| > 0$ となります。

また、分母の $(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)$ も正です。

ということは、$f'(x)$ の符号は $|\cos x| - |\sin x|$ の符号と一致します。

＊増減表をかくために微分をしました。微分で必要なので $f'(x)$ の符号だけですよ。符号が必要です。正でかけても、割っても符号は変わりません。関係のないものは、外して考えていくのが $f'(x)$ の符号を考えるポイントです。

ここから、$|\cos x| - |\sin x|$ の符号を考えていきます。このくらいなら頭で分かるかもしれません。ですが、以下は重要なので覚えておいてください。

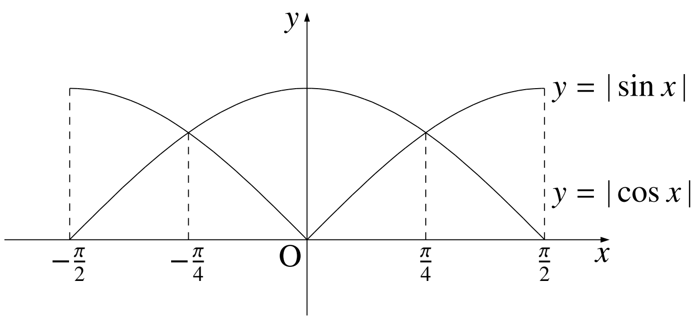
符号の調べ方

$f'(x)$ の符号を調べるとき、$f'(x) = g(x) - h(x)$ と変形して $y = f(x), y = h(x)$ の 2 つのグラフの上下関係で符号を調べることがある。

頭の中で考えても分かりにくいものも、グラフをかくと視覚的に判断できるので簡単ですよ。このグラフを使って符号を調べる方法は知らない人が多いです。

ですが、非常にパワフルな技ですよ。ぜひとも、身につけておいてください。

それでは、$|\cos x| - |\sin x|$ の符号をを $y = |\cos x|, y = |\sin x|$ のグラフの上下関係で調べていくことにします。



⇑ $-\dfrac{\pi}{2} < x < -\dfrac{\pi}{4}$ と $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ では $y = |\cos x|$ のグラフの方が $y = |\sin x|$ のグラフの下側にあるので $|\cos x| - |\sin x| < 0$ となる。

$-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ では $y = |\cos x|$ のグラフの方が $y = |\sin x|$ のグラフの上側にあるので $|\cos x| - |\sin x| > 0$ となる。

これをもとに増減表を書けば、増減表は以下のようになります。

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

この増減表より、最大値は $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ と $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ の大きい方、最小値は $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ と $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の小さい方ということが分かります。

ただ、今回の問題は周期が π で $f(x+\pi)=f(x)$ が成立するんだよね。だから、$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ が成立します。

これより、最大値が $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ で最小値が $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ であることがわかりますよ。
⇑ 少し分かりにくいかもしれません。ですが、増減表から冷静に考えたら確認できると思います。各自確認をしておいてください。

ここからは、計算をしていくだけです。それでは、解答に進みます。

【問題（１）の解答】

$$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$\begin{aligned}f(x+\pi)&=\int_{(x+\pi)}^{(x+\pi)+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt\\&=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt\end{aligned}$$

$u=t-x$ とする。

t	$x+\pi \to x+\frac{3}{2}\pi$
θ	$x \to x+\frac{\pi}{2}$

また、$u = t - x$ の両辺を u で微分をすると

$$1 = \frac{dt}{du} \text{ つまり } dt = du$$

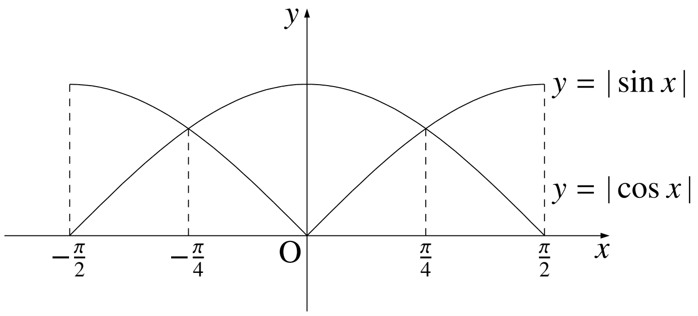
$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u+\pi)|}{1+\sin^2(u+\pi)}\,du \\ &= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|-\sin u|}{1+(-\sin u)^2}\,du \quad (\because \quad \sin(u+\pi) = -\sin u) \\ &= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}\,du = f(x) \end{aligned}$$

よって、$f(x)$ は周期が π の関数である。従って、$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のときだけを考えればよい。

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+\frac{\pi}{2}\right)' \frac{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} - x' \frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x} \\ &= \frac{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x} \quad ◀ \left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = 1, x' = 1 \\ &= \frac{|\cos x|}{1+\cos^2 x} - \frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x} \\ &= \frac{|\cos x|}{1+|\cos x|^2} - \frac{|\sin x|}{1+|\sin x|^2} \quad ◀ \sin^2 x = |\sin x|^2, \cos^2 x = |\cos^2 x| \text{ より！} \\ &= \frac{|\cos x|(1+|\sin x|^2) - |\sin x|(1+|\cos x|^2)}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)} \quad ◀ \text{通分をした！} \\ &= \frac{|\cos x| + |\sin x|^2|\cos x| - |\sin x| - |\sin x||\cos x|^2}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)} \\ &= \frac{|\cos x| - |\sin x| - |\sin x||\cos x|(|\cos x| - |\sin x|)}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)} \quad ◀ |\cos x| - |\sin x| \text{ が共通因数！因数分解できる !!} \\ &= \frac{(|\cos x| - |\sin x|)(1 - |\sin x||\cos x|)}{(1+|\cos x|^2)(1+|\sin x|^2)} \end{aligned}$$

$y = |\sin x|$ のグラフと $y = |\cos x|$ のグラフをかくと以下のようになる。



グラフより、$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $|\sin x| - |\cos x| > 0$ つまり $f'(x) > 0$ となり、$-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $|\sin x| - |\cos x| < 0$ つまり $f'(x) < 0$ となる。

よって増減表は、以下のようになる。。

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ であることと増減表より、最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$、最小値は $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる。

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{1+\sin t}\,dt \quad \left(\because\ \frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \frac{\pi}{4} \text{のとき、} \sin t \geqq 0\right) \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{1+(1-\cos^2 t)}\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{2-\cos^2 t}\,dt
\end{aligned}
$$

$*$ $\displaystyle\int (\cos t \text{のみの式}) \sin t\,dt$ のときは、$\cos t = u$ と置換すればうまくいきます。このあたりはその場で思いつくのは難しいです。しっかりと暗記しておかないとダメですよ。

$\cos t = u$ とする。両辺を t で微分すると $-\sin t = \dfrac{du}{dt}$ つまり $\sin t\, dt = -du$

t	$\dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{3}{4}\pi$
t	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \to -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2-u^2}(-1)\, du$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2-u^2}\, du$$ ◀ -1 を使って積分区間を逆にした！

＊ $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$ がきたら偶関数・奇関数を使えないか考えます。

今回の $\dfrac{1}{2-u^2}$ は偶関数ですよ。

$$= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2-u^2}\, du$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(\sqrt{2}+u)(\sqrt{2}-u)}\, du$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u} + \frac{1}{\sqrt{2}-u}\right) du$$ ◀ 部分分数分解をした！

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{\frac{(\sqrt{2}+u)'}{\sqrt{2}+u} - \frac{(\sqrt{2}-u)'}{\sqrt{2}+u}\right\} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\log|\sqrt{2}+u| - \log|\sqrt{2}-u|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\log\left|\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right| - \log\left|\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| - \log|\sqrt{2}| + \log|\sqrt{2}|\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\frac{3}{2}\sqrt{2} - \log\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$$

＊たった、これだけの計算なのに $\cos t = u$ と置換、偶関数・奇関数、部分分数分解といろいろと大変だったよね。ただ、これらはすべて典型で考えているようではダメですよ。定積分・不定積分は解法を覚えてしまわないといけません。まだ、覚えていない人は大

急ぎで覚えてください。

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt\quad\left(\because\quad\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\text{は偶関数}\right)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt\quad\left(\because\quad 0\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}\text{のとき}\sin t\geqq 0\right)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{2-\cos^2 t}\,dt$$

$\Uparrow\displaystyle\int(\cos t\text{のみの式})\sin t\,dt$ の形にした！ここから、$\cos t=u$ と置換して解いていきます。

$\cos t=u$ とする。両辺を t で微分すると $-\sin t=\dfrac{du}{dt}$ つまり $\sin t\,dt=-du$

t	$0\to\frac{3}{4}\pi$
t	$1\to\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2-u^2}(-1)\,du$$

$$=2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2-u^2}\,du$$ ◀ 積分区間を逆にした！

$$=2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}+\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)du$$ ◀ 部分分数分解をした！

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left\{\frac{(\sqrt{2}+u)'}{\sqrt{2}+u}-\frac{(\sqrt{2}-u)'}{\sqrt{2}-u}\right\}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\log|\sqrt{2}+u|-\log|\sqrt{2}-u|\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\log|\sqrt{2}+1|-\log|\sqrt{2}-1|-\log\left|\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|+\log\left|\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\log\frac{3}{2}\sqrt{2}+\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)-\log\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{2\log(\sqrt{2}+1)-\log 3\}$$

以上より、$x=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\mathbf{\log 3}$、$x=-\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\{\mathbf{2\log(\sqrt{2}+1)-\log 3}\}$ となる。

かなりハードな問題だったよね。この問題は、東工大の過去問です。

たった一問ですが、周期関数、$f'(x)$ の考えかた、また積分で置換の仕方、偶関数・奇関数、部分分数分解といろいろなものが出てきます。

計算が多く大変です。ただ、慣れてきたら「計算が大変ではあるけど、簡単な問題だな」と思えてきます。そのレベルになるまで、しっかりと勉強をしてください。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司